اهداف فصل

۱-آشنایی با مفهوم دنباله

۲-آشنایی با چند نوع دنباله خاص (حسابی و هندسی)

۳- آشنایی با مفهوم اولیه ی حد دنباله ها

۴-آشنایی با تقریبات اعشاری اعداد

۵-تعمیم مفهوم ریشه گیری به ریشه های مراتب بالاتر

۶-آشنایی با ویژگیهای اساسی ریشه گیری

۷-آشنایی با توان رسانی با توان اعداد گویا

۸-آشنایی با توان رسانی با توان اعداد حقیقی

عملکرد مورد انتظار

دانش آموزان باید بتوانند:

۱-دنباله را بشناسندو نمونه هایی از آن را ارائه کنند.

۲-دنباله های حسابی و هندسی را تشخیص دهند و قدر نسبت آنها را بدست آورند.

۳-الگوی موجود در دنباله ها را تشخیص دهند و بر طبق آن جملات دنباله را حدس بزنند.

۴-ریشه های kام اعداد را بشناسندو در حالت k زوج و فرد تعداد ریشه ها را تشخیص دهند.

۵-با ویژگیهای اساسی ریشه گیری کار کنندو محاسبه انجام دهند.

۶-ویژگیهای اساسی توان رسانی را بشناسند و با استفاده از آنها محاسبه انجام دهند.

۷-مفهوم نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد را بشناسند و آنرا در موارد ساده تشخیص دهند.

۸-دنباله تقریبات اعشاری اعداد گویا را بسازد و برای اعداد رادیکالی چند جمله اول را بدست آورند.

پیش نیازها

۱- آشنایی با اعداد و خواص اساسی اعداد.

۲-آشنایی با ریشه دوم و سوم اعداد

بخش اول: دنباله ها

نگاه کلی به بخش :

هدف این بخش آشنا کردن دانش آموزان با مفهوم دنباله به عنوان یک توالی از اعداد و یافتن الگوی حاکم بر این اعداد است.در این بخش دنباله های متناهی از نامتناهی تفکیک نشده اند وهر دو نوع دنباله مورد بحث قرار گرفته اند. در این بخش مفاهیم، جمله عمومی دنباله و نمایشی اندیسی a_n نیز مطرح می شوند.

ورود به مطلب

برای آغاز مفهوم دنباله مناسب است در یک بستر واقعی این مفهوم نشان داده شود. در کتاب از پدیده حرکت قاره ها استفاده شده است. در هر جایی که یک توالی از اعداد در محاسبات رخ می دهد می توان مفهوم دنباله را نشان داد. در این اندازه گیری سالیانه میزان حرکت قاره ها مورد استفاده قرار گرفته است که در پایان هر سال می توان عددی بدست آورد که این اعداد به دنبال هم یک دنباله تشکیل می دهند.

سپس ، تعریف رسمی دنباله و نمادگذاری اندیسی a_n ، اصطلاح جمله عمومی به همراه چند مثال آورده می شود.

فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب به یک فعالیت در کتاب می رسیم که به شکل زیر انجام می شود.

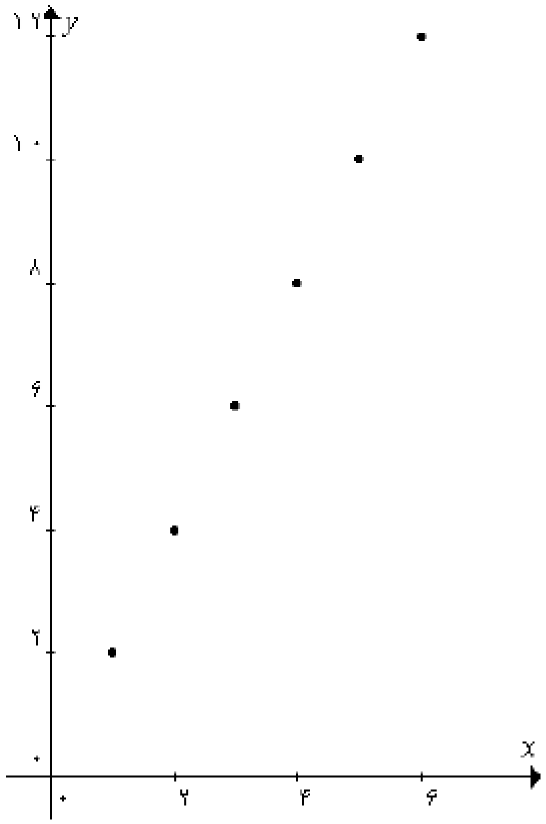
فعالیت صفحه ۲

۱- با توجه به آن که هر سال ۲ سانتی متر قاره ها حرکت می کنند ، دو تا دو تا به اعداد جدول اضافه می کنیم.

۲- چون هر سال ۲ سانتی متر حرکت داریم برای حرکت ۴۰ سانتی متر ، ۲۰ سال وقت احتیاج داریم. چون از سال ۱۳۸۸ شروع کرده ایم، در پایان سال ۲۰+۱۳۸۸ ،به مقدار ۴۰ سانتی متر حرکت می رسیم.

۳- این ماشین هر عدد را در ۲ ضرب می کند و با قرار دادن این اعداد، دقیقاً همان اعداد سطر دوم بدست می آید.

۴- نمودار این رابطه بصورت نقطه ای از خط $y = ۲x$ است (نمودار مقابل)



۵- چون مقدار حرکت قاره ها در سال nام، $۲n$ سانتی متر است ، ۱۰۰۰۰۰۰×۲سانتی متر جواب مسأله است.

در این مثال الگوی ساده ای وجود دارد که می توان به سادگی آن را به دست آورد. برای بیان دقیقتر میزان حرکت قاره ها در سال nام از علامتگذاری a_n استفاده می شود تا رابطه ریاضی بهتر بیان شوند.

فعالیت صفحه ۴

۱- با توجه به آن که در هر مرحله تعداد سطرها و تعداد ستونها یکی اضافه می شود، تعداد مربعها $۱^۲, ۲^۲, ۳^۲$ است و در مراحل بعد تعداد مربعها به شکل زیر است

مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد مربع	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶

۲- در مرحله nام، تعداد مربعها $n^۲$ است

۳- $۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶$

۴- این قانون، همان توان دوم رسانی است، یعنی $a_n = n^۲$

۵- $a_{۳۰} = ۳۰^۲ = ۹۰۰$

در ادامه تعریف رسمی دنباله و اصطلاحات مربوط به آن با ارائه مثال بیان می شود.

تمرین در کلاس صفحه ۵

۱- الف) $۲,۷,۱۲,۱۷,...$

در هر مرحله عدد ۵ به جمله قبلی اضافه شده است،پس سه جمله بعدی $۳۲,۲۷,۲۲$ خواهد بود.

با رسم جدول داریم

مرحله	۱	۲	۳	۴	۵
جمله دنباله	۲	۷	۱۲	۱۷	۲۲

اعداد سطر دوم ۵ برابراعداد سطر اول منهای ۳ هستند. پس $a_n = ۵n - ۳$

ب) $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},۱,۱\frac{۱}{۴},۱\frac{۱}{۲},....$

در هرمرحله عدد $\frac{۱}{۴}$ به عدد قبلی اضافه شده است، پس سه جمله بعد $۱\frac{۳}{۴},۲,۲\frac{۱}{۴}$ هستند.

چون در هر مرحله عدد $\frac{۱}{۴}$ به عدد قبلی اضافه می شود، پس از n مرحله $\frac{۱}{۴}(n-۱)$ به اولین عدد اضافه شده است، پس $a_n = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}(n-۱) = \frac{۱}{۴}n$

۲-

مرحله	۱	۲	۳	۴
جمله دنباله	۴	۷	۱۰	۱۳

$\Rightarrow a_n = ۳n + ۱$

مسائل صفحه۵

۱-

مرحله	۱	۲	۳	۴
جمله دنباله	۴	۸	۱۲	۱۶

$\Rightarrow \quad a_n = ۴n$

۲-چون در هر ردیف ،۴ صندلی اضافه تر از ردیف قبلی قرار گرفته است و در اولین ردیف ۶ صندلی داریم، تعداد صندلی های هر ردیف به شکل زیرند

مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد صندلی	۶	۱۰	۱۴	۱۸	۲۲	۲۶	۳۰

۳- دنباله $a_n = ۳n$ دارای چهار جمله اول ۱۲,۹,۶,۳ است و جدول آن بصورت زیر است

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۳	۶	۹	۱۲

۴- در هر مرحله تا زدن تعداد مستطیلها ۲ برابر می شود، در مرحله اول فقط یک مستطیل داریم، پس تعداد مستطیلها در هر مرحله عبارت است از ...,۳۲,۱۶,۸,۴,۲

این دنباله در واقع به شکل روبروست $۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴, ۲^۵, \ldots$

پس جمله ی عمومی این دنباله $a_n = ۲^{n-۱}$ است.

۵-

الف)

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۶}{۴}$	$\frac{۸}{۵}$

ب)

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۲	$\frac{۲۳}{۲}$	$\frac{۸۰}{۳}$	$\frac{۱۹۱}{۴}$

ج)

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۱	۰	-۱	۰

۶- ۱ راست با ۴ چپ ،۲ راست با ۱ چپ ، ۳ راست با ۲ چپ ، ۴ راست با ۳ چپ.

۷- در اولین هفته پولی در صندوق نیست و فقط پول توجیبی ۱۶۰۰ تومان دریافت می شودو در صندوق گذارده می شود. نصف آن خرج می شود و۸۰۰ تومان در پایان هفته ی اول می ماند.در هفته بعد۱۶۰۰تومان گرفته می شود و در صندوق گذارده می شود، موجودی۲۴۰۰ تومان میشود. دوباره نصف آن خرج شده و در پایان هفته دوم ۱۲۰۰ تومان در صندوق باقی می ماند که با احتساب ۱۶۰۰ تومان اول هفته سوم موجودی ۲۸۰۰ تومان میشود،که با خرج نصف آن در پایان هفته سوم ۱۴۰۰ تومان در صندوق باقی می ماند. سه جمله ی اول دنباله پولهای صندوق در پایان هر هفته...,۸۰۰,۱۲۰۰,۱۴۰۰ می باشدو جمله ی بعدی برابر $\frac{۱۴۰۰+۱۶۰۰}{۲}$ است

اگر در پایان هفته nام میزان پول صندوق a_n باشد، در اول هفته ی$n+۱$ام پول صندوق $a_n + ۱۶۰۰$ است که نصف آن خرج می شود و

$$a_{n+۱} = \frac{a_n + ۱۶۰۰}{۲} = \frac{a_n}{۲} + ۸۰۰$$

بخش دوم : دنباله حسابی

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش معرفی دنباله های حسابی است که نوع خاصی از دنباله ها هستند. روش این بخش ارائه یک دنباله حسابی در قالب یک فعالیت و سپس تعریف رسمی مفاهیم جمله اول وقدر نسبت دنباله های حسابی است. سپس با چند مثال و تمرین در کلاس آموزش این مفهوم تکمیل می شود.

ورود به مطلب

در این بخش نیز ارائه یک موقعیت واقعی که در آن یک دنباله حسابی دیده می شود، شروع مناسبی است. در کتاب در مسأله مصدومیت بازیکن فوتبال و زمان لازم برای بهبودی او استفاده شده است. دنباله ای که در این مسأله با آن برخورد می شود یک دنباله حسابی است.

فعالیت آموزشی

پس از طرح یک مسأله، فعالیتی آورده شده است که در آن مسأله طرح شده حل می شود.

فعالیت صفحه ۷

۱- جدول داده شده تا ۴ هفته تکمیل شده است. برای تکمیل آن تا هفته ی هفتم باید الگوی موجوددر این جدول را بدست آوریم. عدد هر مرحله با اضافه کردن ۳ به عدد مرحله ی قبل بدست می آید.پس جدول را می توانیم تا هفت هفته به شکل زیر حل کنیم

تعداد هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
زمان دویدن	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰

۲- عدد هر هفته ۳ واحد بیشتر از هفته قبل است.

۳- این جدول را به شکل زیر می نویسیم

تعداد هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶
زمان دویدن	۱۲	۱۲ + ۱ × ۳	۱۲ + ۲ × ۳	۱۲ + ۳ × ۳	۱۲ + ۴ × ۳	۱۲ + ۵ × ۳

جدول نشان می دهد که عدد هفته ی nام به صورت $۱۲+(n-۱)\times ۳$ است. پس از ساده سازی داریم $a_n=۹+۳n$.

۴- برای آنکه بازیکن بتواند بازی کند a_n بایدحداقل ۱۳۸ شود، پس معادله $۹+۳n=۱۳۸$ را باید حل کنیم که جواب آن ۴۳ است. یعنی بازیکن پس از ۴۳ هفته می تواند بازی کند.

۵- اگر افزایش زمان دویدن۶ دقیقه باشد، جملات دنباله به صورت $a_n=۱۲+(n-۱)\times ۶$ خواهند بود،یعنی $a_n=۶+۶n$ و باید معادل $۶+۶n=۱۳۸$ را حل کنیم که جواب آن $n=۱۲$ است.

پس از این فعالیت تعریف رسمی دنباله حسابی و مفاهیم قدر نسبت وجمله اول و فرمول جمله عمومی به همراه چند مثال ارائه میشود.

تمرین در کلاس صفحه ۹

از آنجا که میزان وارد شدن آب در هر دقیقه ۳/۵ لیتر است و در ابتدا حوض ۲۵ لیتر آب داشته است مقدارآب حوض در پایان دقیقه های اول تا پنجم برابر ۲۸/۵ , ۳۲ , ۳۵/۵ , ۳۹ , ۴۲/۵ می باشد.

این دنباله حسابی است زیرا هر مرحله با اضافه شدن ۳/۵ به جمله ی قبلی ساخته می شود.

در پایان دقیقه ی n ام مقدار آب $۲۸/۵+(n-۱)\times ۳/۵$ است و باید معادله

$$۲۸/۵+(n-۱)\times ۳/۵=۱۰۲$$

را حل کنیم که جواب آن $n=۲۲$ است.

مسائل صفحه ۹

۱- الف) خیر، چون به جمله ها مقدار ثابتی اضافه نشده است .

$$\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲} \qquad , \qquad \frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۶}$$

(در هر مرحله به مخرج یک واحد اضافه شده است، الگو بصورت $a_n=\frac{۱}{n}$ است.)

ب) بله، $-۱۸-(-۱۵)=-۲۱-(-۱۸)=-۳$

(هرجمله با کم کردن ۳ واحد از جمله‌ی قبل بدست می آید، الگو بصورت $a_n=-۳n-۱۲$ است.)

ج) خیر، $\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}\neq\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}$

(در هر مرحله به صورت و مخرج یک واحد اضافه شده است، الگو بصورت $a_n=\frac{n}{n+۱}$ است.)

د) بله، $\sqrt{۳}-۰=۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}$

(هرجمله با اضافه کردن $\sqrt{۳}$ واحد به جمله‌ی قبل بدست می آید، الگو بصورت $a_n=(n-۱)\sqrt{۳}$ است.)

۲- $۱۰,۳,-۴,-۱۱,-۱۸$

۳- جملات یک دنباله ی حسابی بصورت زیر است

$$a, a+d, a+۲d, a+۳d, ..., a+(n-۱)d, ...$$

که در آن $a_n=a+(n-۱)d \ , \quad a_{n-۱}=a+(n-۲)d$

و با محاسبه ی $a_n-a_{n-۱}=a+(n-۱)d-(a+(n-۲)d)=d$ به d می رسیم که همان قدر نسبت است.

۴- خیر، $a_۲=-\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۳}{۲}\neq\frac{۲}{۳}$

۵- $d=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{1}{3}-(-\frac{1}{12})=\frac{5}{12}$

۶- $\left.\begin{matrix}d=y-x\\ d=z-y\end{matrix}\right\}\Rightarrow y-x=z-y\Rightarrow 2y=x+z\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+z)$

۷-

$$\left.\begin{matrix}a_5=a+4d=17\\ a_{12}=a+11d=52\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=-3,d=5\Rightarrow a_n=-3+(n-1)\times5\Rightarrow a_n=5n-8$$

۸- $2(2+x)=(1-x)+(1+2x)\quad\Rightarrow\quad x=-2$

۹-جملات یک دنباله ی حسابی بصورت زیر است

$$a,a+d,a+2d,a+3d,...,a+(n-1)d,...$$

که با ضرب آن در عددی مثل c بصورت زیر در می آید.

$$ca,ca+cd,ca+2cd,ca+3cd,...,ca+c(n-1)d,...$$

که دنباله ایست حسابی با جمله ی اول ca و قدر نسبت cd .

۱۰- $\alpha,\beta,\theta:\quad\left.\begin{matrix}2\beta=\alpha+\theta\\ \alpha+\beta+\theta=180^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3\beta=180^\circ\Rightarrow\beta=60^\circ$

۱۱- اگر اضلاع مثلثی که از کوچک به بزرگ مرتب شده اند، دنباله ی حسابی تشکیل دهند و اولین جمله ۱ باشد این اضلاع بصورت $1,1+d,1+2d$ هستند. اگر این مثلث قائم الزاویه باشد، وتر آن $1+2d$ است و باید داشته باشیم $(1+2d)^2=(1+d)^2+1^2$

از این معادله درجه دوم بر حسب d ، جواب $d=\frac{1}{3}$ بدست می آید و مثلث با اضلاع $1,\frac{4}{3},\frac{5}{3}$ ،مثلث قائم الزاویه ی مطلوب است.

اگر طول ضلع کوچکتر را a در نظر بگیریم. جواب مطلوب $a,\frac{4}{3}a,\frac{5}{3}a$ بدست می آید.

بخش سوم : دنباله های هندسی

نگاه کلی به بخش:

هدف اصلی این بخش آشنایی با دنباله های هندسی است که نوع خاصی از دنباله ها هستند. روش این بخش ارائه تعریف رسمی دنباله هندسی و مفاهیم قدر نسبت وجمله ی اول این دنباله ها و ارائه چند مثال و تمرین می باشد.

ورود به مطلب

ارائه مفهوم از طریق یک مسأله ی واقعی وسپس ارائه تعریف رسمی، شیوه ی اصلی این کتاب است در این بخش نیز از مسأله ی زمین خوردن توپ و مجدداً به هوا رفتن آن استفاده شده است. دراین مسأله دنباله هندسی دیده می شود و با آن کار می شود.

فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب به یک فعالیت می رسیم که در طی آن با یک دنباله هندسی کار می شود.

فعالیت صفحه ۱۰

۱- در هر برگشت توپ به هوا به ۶۰ درصد ارتفاع قبلی می رسیم. در اولین برخورد ارتفاع قبلی ۲۵ متر بوده است پس ارتفاع توپ بعد از برخورد $۲۵\times\frac{۶۰}{۱۰۰}$ ، یعنی ۱۵ متر خواهد بود، پس از دومین برخورد توپ به ارتفاع $۱۵\times\frac{۶۰}{۱۰۰}$ ، یعنی ۹متر خواهدرسید، پس از سومین برخورد ارتفاع توپ $۹\times\frac{۶۰}{۱۰۰}$ یعنی ۵/۴ متر خواهد شد.

۲- هرجمله این دنباله با ضرب $\frac{۶۰}{۱۰۰}$ در جمله قبلی بدست آمده است.

۳- جملات این دنباله را بصورت زیر می نویسیم

$$۲۵\times\frac{۶۰}{۱۰۰},۲۵\times(\frac{۶۰}{۱۰۰})^{۲},۲۵\times(\frac{۶۰}{۱۰۰})^{۳},...$$

این الگو نشان می دهد جمله nام این دنباله $a_n = ۲۵\times(\frac{۶۰}{۱۰۰})^n$

۴- این دنباله، دنباله ی حسابی نیست، زیرا جملات آن با جمع عددی ثابت با جمله قبلی ساخته نشده است.

پس از تعریف رسمی دنباله هندسی و ارائه مثال به یک تمرین در کلاس می رسیم.

تمرین در کلاس صفحه ۱۱

۱- الف) جمعیت سال دوم $۵۰+۵۰\times\frac{۳}{۱۰۰}$ است ،پس جمعت سال دوم $(\frac{۳}{۱۰۰}+۱)\times۵۰$ است یعنی ۱/۰۳ برابرجمعیت سال اول است. جمعیت سال سوم بصورت $۵۰\times۱/۰۳+۵۰\times۱/۰۳\times\frac{۳}{۱۰۰}$ است. یعنی جمعیت سال سوم $(\frac{۳}{۱۰۰}+۱)\times(۵۰\times۱/۰۳)$ است. پس جمعیت سال سوم نیز ۱/۰۳ برابر سال دوم است.

ب) جمعیت هر سال با ضرب ۱/۰۳ در جمعیت سال قبل بدست می آید.

$$۵۰,۵۱/۵,۵۳/۰۴۵,۵۴/۶۳۶۳۵,۵۶/۲۷۵۴۴۰۵$$

ج) این دنباله حسابی نیست، زیراتفاضل جملات متوالی آن مقدار ثابتی نیست.

این دنباله هندسی است زیرا هر جمله آن با ضرب عدد ثابت ۱/۰۳ در جمله ی قبل ساخته شده است.

د) جملات دنباله جمعیت در هر سال به صورت زیر است.

$$۵۰,۵۰\times۱/۰۳,۵۰\times(۱/۰۳)^۲,۵۰\times(۱/۰۳)^۳,...$$

این الگو نشان می دهد جمله nام به صورت $a_n = ۵۰\times(۱/۰۳)^{n-۱}$ است.

۲- الف)دنباله ...,۵,۵,۵,۵ هندسی است زیرا هر جمله با ضرب عدد ۱ در جمله قبلی ساخته شده است.

ب) دنباله $-۱,۲,-۴,۸,-۱۶,...$ هندسی است زیرا هر جمله با ضرب عدد (۲-) در جمله قبلی ساخته شده است.

ج)دنباله $۲,۴,۶,۸,...$ هندسی نیست زیرا نسبت دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی نیست.

د)دنباله $۱-\pi,۱-\pi^۲,(۱-\pi^۲)(۱+\pi),...$ هندسی است، زیرا هر جمله آن با ضرب $\pi+۱$ در جمله قبلی ساخته شده است.

مسائل صفحه ۱۲

۱- $۵,-۱,\frac{۱}{۵},-\frac{۱}{۲۵},\frac{۱}{۱۲۵}$

۲- $q=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۳\div\frac{۴}{۳}=\frac{۹}{۴}$

۳- $q=\frac{b}{a}\quad\Rightarrow b\times\frac{b}{a}=\frac{b^۲}{a}$

۴- $$\left.\begin{array}{l} q=\frac{y}{x}\\ q=\frac{z}{y}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{z}{y}\Rightarrow y^۲=xz$$

۵- $$\left.\begin{array}{l} a_۴=aq^۳=۱\\ a_۷=aq^۶=۸\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{aq^۶}{aq^۳}=۸\Rightarrow q^۳=۸\Rightarrow q=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۸}$$

$$a_n=(\frac{۱}{۸})(۲)^{n-۱}\Rightarrow a_n=۲^{n-۴}$$

۶- دو جواب $x^۲=(۱-x)(۱+x)\Rightarrow ۲x^۲=۱\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲},۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۷- شعاع اولین دایره را r می نامیم، مساحت اولین دایره $\pi r^{۲}$ است. پس $s_{۱}=\pi r^{۲}$. در مرحله دوم ۲ دایره با شعاع $\frac{r}{۲}$داریم،که مساحت آنها $\pi(\frac{r}{۲})^{۲}+\pi(\frac{r}{۲})^{۲}$ خواهد بود، یعنی $s_{۲}=\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}$. در مرحله سوم، ۴دایره داریم که شعاع هر یک $\frac{r}{۴}$ است. مجموع مساحت آنها $۴\times\pi(\frac{r}{۴})^{۲}$ است، یعنی $s_{۳}=\frac{۱}{۴}\pi r^{۲}$.

در هر مرحله تعداد دایره ها دو برابر تعداد دایره های مرحله قبلی است و شعاع آنها نصف شعاع دایره های قبلی است. پس شعاع دایره ها یک دنباله به صورت زیر است.

$$r,\frac{۱}{۲}r,\frac{۱}{۴}r,\frac{۱}{۸}r,...$$

و تعداد دایره ها یک دنباله به صورت زیر است.

$$۱,۲,۴,۸,...$$

پس در مرحله nام، شعاع دایره ها $\frac{۱}{۲^{n-۱}}r$ و تعداد آنها $۲^{n-۱}$ است و مجموع مساحت آنها $۲^{n-۱}\times\pi(\frac{۱}{۲^{n-۱}})^{۲}$ است . یعنی $s_{n}=\frac{۱}{۲^{n-۱}}\pi r^{۲}$.

این یک دنباله هندسی با جمله اول $\pi r^{۲}$ وقدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ است.

۸- یک دنباله هندسی به صورت زیر است

$$a,aq,aq^{۲},...,aq^{n-۱},...$$

اگر جملات دنباله را در عدد b ضرب کنیم به شکل زیر در می آید

$$ab,abq,abq^{۲},...,abq^{n-۱},...$$

این دنباله یک دنباله هندسی با جمله اول ab و قدر نسبت q است.

۹- یک دنباله هندسی به صورت زیر است

$$a, aq, aq^{۲}, \dots, aq^{n-۱}, \dots$$

اگر جملات دنباله را به توان ۲ برسانیم، به شکل زیر در می آید

$$a^{۲}, a^{۲}q^{۲}, a^{۲}q^{۴}, \dots, a^{۲}q^{۲n-۲}, \dots$$

این یک دنباله هندسی با جمله اول $a^{۲}$ با قدر نسبت $q^{۲}$ است.

۱۰- فرض کنید دنباله ای هم حسابی و هم هندسی باشد.پس این دنباله به صورت زیر است.

$$a, aq, aq^{۲}, \dots, aq^{n-۱}, \dots$$

بخاطر حسابی بودن، تفاضل دو جمله متوالی ، مقداری ثابت است و تفاضل جملات متوالی بشکل زیر است

$$a(q-۱), aq(q-۱), aq^{۲}(q-۱), \dots$$

در صورت تساوی این مقدارها باید داشته باشیم $a(q-۱) = aq(q-۱)$

اگر $a \neq ۰$ و $q \neq ۱$ نتیجه می شود $q = ۱$ که خلاف فرض است. پس فقط حالت $a = ۰$ یا $q = ۱$ باید بررسی شوند. در حالت $a = ۰$ ،دنباله به شکل دنباله ثابت ....,۰,۰,۰,۰ است ،که یک دنباله حسابی است.

ودر حالت $q = ۱$ ،دنباله به شکل دنباله ی ثابت $a, a, a, a, \dots$ است ،که بازهم یک دنباله حسابی است.

بنابراین در هردو حالت دنباله های ثابت هم هندسی هستند و هم حسابی.

۱۱-

$$\begin{matrix} a_{۱}a_{۳} = ۴ \\ a_{۲}a_{۵} = ۱۶ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} aaq^{۲} = ۴ \\ aq^{۱}aq^{۴} = ۱۶ \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^{۲}q^{۲} = ۴ \\ a^{۲}q^{۶} = ۱۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a^{۲}q^{۶}}{a^{۲}q^{۲}} = \frac{۱۶}{۴} \Rightarrow q^{۴} = ۴ \Rightarrow q = \pm\sqrt[۴]{۴}$$

$$\Rightarrow q = \pm\sqrt{۲}, a = \pm\sqrt{۲}$$

بخش چهارم: نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد

نگاه کلی به بخش:

هدف اصلی این بخش آشنایی اولیه ی دانش آموزان با مفهوم حد دنباله هاست. البته مستقیماً نامی از حد آورده نمی شود وبه اندازه ی یک درک شهودی از مفهوم حد از نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد خاص صحبت خواهد شد. این بخش در سالهای بعد به صورت مفهوم دقیقتر حد تکمیل خواهد شد.

ورود به مطلب

در حالت کلی دنباله های حسابی و هندسی به عدد خاصی نزدیک نمی شوند و بهتر است بخش را با تذکر نسبت به مفهوم دنباله های کلی شروع کنیم و مثالهایی از دنباله های کلی ارائه کنیم که به یک عدد خاص نزدیک می شوند. مناسب است با دنباله های ساده مانند

$$۰/۱,۰/۰۱,۰/۰۰۱,...,۰/۰۰۰...۰۰۱,...$$

شروع کنیم و این پرسش را مطرح کنیم که جملات این دنباله چگونه تغییر می کنند؟ مقدار آنها بزرگ یا کوچک به چه عددی نزدیک می شوند؟

سپس مثالهای دیگری را ارائه کنیم و همین پرسشها را تکرار کنیم و نهایتاً تعریف شهودی حد یک دنباله را با اصطلاح نزدیک شدن جملات آن به یک عدد مطرح سازیم.

فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب ، فعالیتی در کتاب هست که دنباله خاصی را به طور عملی می سازد و در آن مفهوم نزدیک شدن جملات آن دنباله به یک عدد خاص را بررسی می کند.

فعالیت صفحه ۱۳

۱- عدد ۱ را به ۳ تقسیم می کنیم ودر خارج قسمت در هر مرحله اعداد زیر بدست می آیند

$$۰/۳,۰/۳۳,۰/۳۳۳,۰/۳۳۳۳,...$$

۲- این خارج قسمت ها به صورت یک دنباله در بالا نوشته شدند.

۳- در هر مرحله یک رقم ۳ به آخرین رقم اعشار قبلی اضافه می شود. جمله ی ششم $۰/۳۳۳۳۳۳$ است.

۴- اگر این اعداد را از $\frac{۱}{۳}$ کم کنیم،اعداد زیر بدست می آیند.

$$\frac{۱}{۳}-۰/۳=\frac{۰/۱}{۳},\frac{۱}{۳}-۰/۳۳=\frac{۰/۰۱}{۳},\frac{۱}{۳}-۰/۳۳۳=\frac{۰/۰۰۱}{۳},...$$

پس شش جمله دنباله تفاضلها بصورت زیر است

$$\frac{۰/۱}{۳},\frac{۰/۰۱}{۳},\frac{۰/۰۰۱}{۳},\frac{۰/۰۰۰۱}{۳},\frac{۰/۰۰۰۰۱}{۳},\frac{۰/۰۰۰۰۰۱}{۳}$$

البته ممکن است دانش آموزان تفاضل را به صورت دیگری انجام دهند و دنباله تفاضل را به شکل زیر بنویسند

$$\frac{۱}{۳۰},\frac{۱}{۳۰۰},\frac{۱}{۳۰۰۰},\frac{۱}{۳۰۰۰۰},\frac{۱}{۳۰۰۰۰۰},\frac{۱}{۳۰۰۰۰۰۰}$$

۵- در حالت اول در هر مرحله یک کسر با مخرج۳ داریم که صورت آن بشکل یک عدد اعشاری است، پس از اعشار تعدادی صفر ورقم آخر ۱ است. تعداد صفرها یکی کمتر از عدد آن مرحله است. هر چه مراحل جلوتری را حساب کنیم صورت این کسر به صفر نزدیک می شود، پس خود کسر هم به صفر نزدیک می شود.

۶- پس جملات دنباله ی اصلی $۰/۳,۰/۳۳,۰/۳۳۳,۰/۳۳۳۳,...$ به $\frac{۱}{۳}$ نزدیک می شوند.

سپس ذکر یک مثال که مشابه فعالیت است، مفهوم حد دنباله به طور شهودی مطرح شده است.

تمرین در کلاس صفحه ۱۴

با تقسیم ۱ بر ۹ در هر مرحله خارج قسمتها به شکل زیر هستند

$$۰/۱,۰/۱۱,۰/۱۱۱,...$$

این خارج قسمتها در هر مرحله تقریبی از $\frac{۱}{۹}$ هستندو لابد به $\frac{۱}{۹}$ نزدیک می شوند. برای دیدن این موضوع تفاضل جملات این دنباله را از $\frac{۱}{۹}$ بدست می آوریم

$$\frac{۱}{۹}-۰/۱=\frac{۰/۱}{۹},\frac{۱}{۹}-۰/۱۱=\frac{۰/۰۱}{۹},\frac{۱}{۹}-۰/۱۱۱=\frac{۰/۰۰۱}{۹},...$$

دیده می شود که در این دنباله تفاضل نیز ، مخرج کسرها ثابت ۹ هستند وصورت کسرها به صفر نزدیک می شوند. پس دنباله تفاضلات به سمت صفر نزدیک می شودو طبق تعریف دنباله ...,۰/۱۱۱,۰/۱۱,۰/۱به $\frac{۱}{۹}$ نزدیک می شود.

<u>بخش پنجم : دنباله تقریبات اعشاری</u>

<u>نگاه کلی به بخش</u>

هدف این بخش ارائه یکی از مفاهیم اساسی اعداد ایست که دنباله تقریبات اعشاری یک عدد نام دارد. مفهوم تقریبات اعشاری در سال قبل دیده شده است ولی در اینجا این مفهوم به شکل یک دنباله نزدیک شونده به عدد مطرح خواهد شد.

تنها مفهوم جدید این بخش دیدن تقریبات اعشاری به شکل یک دنباله و درک نزدیک شدن جملات این دنباله به عدد خاص است.

در این بخش از دید هندسی استفاده شده است و برای هر عددی با استفاده از محور اعداد با یک الگوریتم مشخص و ساده چگونگی ساختن تقریبات اعشاری ارائه شده است. این روش چه در مورد اعداد گنگ و چه در مورد اعداد گویا یکسان است. نهایتاً در مورد اعداد گویا یک روش مستقیم جبری برای محاسبه دنباله تقریبات اعشاری بیان شده است.

ورود به مطلب

مناسب است بحث را با محاسبه مقدار تقریبی اعداد داده شده مانند $\frac{۱}{۳}$ و $\sqrt{۲}$ از طریق اعداد عشاری شروع کنید و این پرسش را مطرح کنیدکه این اعداد تقریباً چقدر می باشند؟ بعد سعی کنید تقریبات بهتر ارائه کنید. دانش آموزان را راهنمایی نمایید که ساختن این تقریبات بستر، ساختن یک دنباله است.

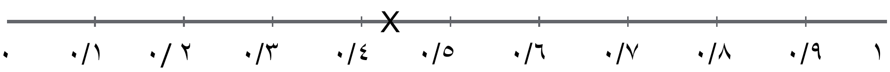
فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب به یک فعالیت می رسیم که مفهوم تقریبات اعشاری را به شیوه ای هندسی ارائه می کند.

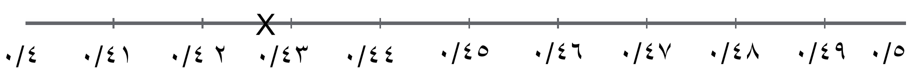
فعالیت صفحه ۱۵

در این فعالیت شما عدد دلخواهی بین صفر و یک باید انتخاب نمایید که در کتاب بصورت مثالی، عدد $\frac{۳}{۷}$انتخاب شده است. شما بهتر است عدد دیگری را انتخاب کنید. می توانید یک عدد گویای ساده انتخاب کنید و اگر مایل بودید می توان اعداد رادیکالی هم انتخاب کرد، اگرچه در این صورت انجام مراحل فعالیت مشکلتر خواهد شد

۱- $x=\frac{۳}{۷} \quad \Rightarrow ۰/۴<\frac{۳}{۷}<۰/۵$

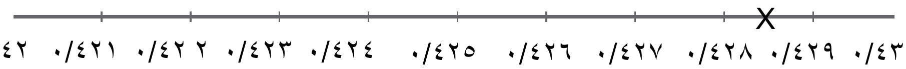


۲- $x=\frac{۳}{۷} \quad \Rightarrow ۰/۴۲<\frac{۳}{۷}<۰/۴۳$



-۳

$$x=\frac{۳}{۷} \qquad \Rightarrow ۰/۴۲۸<\frac{۳}{۷}<۰/۴۲۹$$



بعد از انجام این فعالیت، لازم به ذکر این موضوع می باشد که برای بدست آوردن جملات بعدی دنباله اعداد اعشاری می توان مراحل فوق را تکرار نمود. دنباله ای که به این شکل بدست می آید ویژگی برجسته ای دارد که در کادر آمده است و تعریف رسمی و دقیق دنباله تقریبات اعشاری یک عدد است .

پس از این فعالیت برای اعداد گویا چگونگی ساختن دنباله تقریبات اعشاری از طریق تقسیم بیان شده است.

<u>مسائل صفحه ۱۶</u>

۱- در حل این تمرین، در صورتی که دانش آموزان قادر به حدس زدن نباشند، می توانند اعداد هر یک از دنباله ها را روی محور اعداد مشخص کرده و سپس حدس بزنند

الف) ۱ $\quad ۱-۰/۹=۰/۱ ,۱-۰/۹۹=۰/۰۱ ,۱-۰/۹۹۹=۰/۰۰۱ ,...$

دنباله تفاضلات $\quad ۰/۱ ,۰/۰۱ ,۰/۰۰۱ ,...$

ب) ۳ $\quad ۳-۲/۹=۰/۱ ,۳-۲/۹۹=۰/۰۱ ,۳-۲/۹۹۹=۰/۰۰۱ ,...$

دنباله تفاضلات $\quad ۰/۱ ,۰/۰۱ ,۰/۰۰۱ ,...$

ج) ۵ $\quad ۵-۵/۰۵=۰/-۰/۰۵ ,۵-۵/۰۰۵=-۰/۰۰۵ ,۵-۵/۰۰۰۵=-۰/۰۰۰۵ ,...$

دنباله تفاضلات $\quad -۰/۰۵ ,-۰/۰۰۵ ,-۰/۰۰۰۵ ,...$

د) ۱/۲ $\quad ۱/۲-۱/۱۹=۰/۰۱ ,۱/۲-۱/۱۹۹=۰/۰۰۰۱ ,۱/۲-۱/۱۹۹۹=۰/۰۰۰۰۱ ,...$

دنباله تفاضلات $\quad ۰/۰۱ ,۰/۰۰۱ ,۰/۰۰۰۱ ,...$

۲- همانند تمرین در کلاس صفحه ۱۴.

$$\frac{۵}{۱۱}=۰/۴\,,\frac{۵}{۱۱}=۰/۴۵\,,\frac{۵}{۱۱}=۰/۴۵۴\,,...$$

$$\frac{۵}{۱۱}-۰/۴=\frac{۰/۶}{۱۱}\,,\frac{۵}{۱۱}-۰/۴۵=\frac{۰/۰۵}{۱۱}\,,\frac{۵}{۱۱}-۰/۴۵۴=\frac{۰/۰۰۶}{۱۱}\,,...$$

$$\frac{۰/۶}{۱۱},\frac{۰/۰۵}{۱۱},\frac{۰/۰۰۶}{۱۱},...$$

در کسر های دنباله تفاضلات، مخرج کسر ثابت و صورت کسر در هر مرحله کوچکتر می شود و به سمت صفر نزدیک می شود. پس دنباله تفاضلات به سمت صفر نزدیک می شود. بنابراین طبق تعریف دنباله $۰/۴,۰/۴۵,۰/۴۵۴,...$ به $\frac{۵}{۱۱}$ نزدیک می شود.

۳- در یک دنباله حسابی که بصورت

$$a,a+d\,,a+۲d\,,...,a+(n-۱)d\,,...$$

است اگر $d\neq ۰$، جملات دنباله از لحاظ قدر مطلق همواره در حال بزرگ شدن هستند و از هر عددی بزرگتر می شوند، پس این دنباله به عددی خاص نزدیک نمی شود. اما در حالت $d=۰$ این دنباله ثابت است و به خود همان مقدار ثابت نزدیک می شود.(در واقع خودش است).

۴- جملات دنباله از لحاظ قدر مطلق همواره در حال بزرگ شدن هستند و از هر عددی بزرگتر می شوند. پس به عدد خاصی نزدیک نمی شود.

۵- دنباله هندسی با قدر نسبت ۱ دنباله ای ثابت است و به خود همان مقدار ثابت نزدیک می شود و در واقع خودش است.

۶- اگر x در این نامعادلات صدق کند داریم

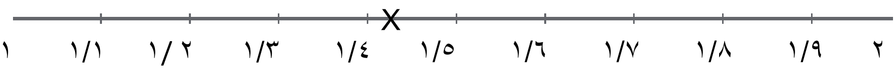
$$۲x+۱<۸/۱۳۱۶\quad\Rightarrow ۲x<۷/۱۳۱۶\Rightarrow x<۳/۵۶۵۸$$
$$۴-x<۰/۴۳۴۳\Rightarrow ۴-۰/۴۳۴۳<x\Rightarrow ۳/۵۶۵۷<x$$

پس $۳/۵۶۵۷ < x < ۳/۵۶۵۸$ و چهار جمله اول تقریبات اعشاری x بصورت زیر است.

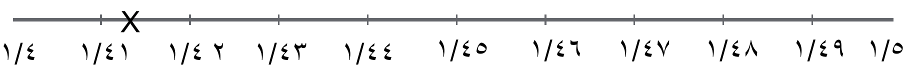
$$۳/۵, ۳/۵۶, ۳/۵۶۵, ۳/۵۶۵۷$$

-۷

$$x = \sqrt{۲} \quad \Rightarrow ۱/۴ < \sqrt{۲} < ۱/۵$$



$$x = \sqrt{۲} \quad \Rightarrow ۱/۴۱ < \sqrt{۲} < ۱/۴۲$$



بخش ششم : ریشه گیری در اعداد حقیقی

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش توسعه مفهوم ریشه گیری از ریشه های دوم وسوم به ریشه های مراتب بالاتر است. این بخش پیش نیاز اصلی برای بخش بعدی در تعریف توان رسانی با توان اعداد گویاست. از آنجا که دانش آموزان با مفهوم ریشه گیری آشنایی کافی دارند، تمامی مفاهیم تقریباً به طور مستقیم ارائه شده است و نیازی به مقدمه چینی و مفهوم سازی نبوده است. ولی برای بررسی ویژگیها و خواص ریشه گیری فعالیتی آمده است تا دانش آموزان خواص ریشه گیری را با فعالیت، خود بدست آورند.

ورود به مطلب

یک راه مناسب برای ورود به این مبحث یادآوری مفهوم ریشه دوم وسوم و پرسش از چگونگی تعمیم این مفهوم است. ابتدا برای ریشه های چهارم وپنجم می توانید پیشنهادات دانش آموزان را بررسی کنید و سپس تعریف ریشه kام رااستخراج کنید.در نمادگذاری $\sqrt[k]{a}$ دقت کنید که در حالت k زوج وفرد، مفهوم فرق می کند.

در حالت k فرد فقط یک عدد b موجود است که $b^k = a$ وb را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می دهیم. اما در حالت k زوج دو عدد b و $-b$ موجودند که $b^k = (-b)^k = a$. دراینجا آن ریشه kام که نامنفی است با $\sqrt[k]{a}$ نشان می دهیم. توجه داشته باشید که در این حالت a نیز عددی نامنفی خواهد بود.

فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب و ارائه چند مثال و معرفی نماد $\sqrt[k]{\ }$ به یک فعالیت می رسیم که هدف آن آشنا کردن دانش آموزان با ویژگی های عمل ریشه گیری است.

فعالیت صفحه ۱۸

۱- روشن است که خود a که بتوان k برسد برابر a^k است،پس به خاطر فرد بودن k ، a ریشه kام a^k است و $\sqrt[k]{a^k} = a$

۲- a و$-a$ که به توان k برسندبرابر a^k می شوند. از میان a و $-a$ آن یکی که مثبت است همان $|a|$ است پس ریشه kام a^k ، $|a|$ است یعنی $\sqrt[k]{a^k} = |a|$ (k زوج است).

۳- بنا به تعریف $\sqrt[k]{a}$ یک ریشه kام a است واگر به توان k برسد برابر a می شودپس $(\sqrt[k]{a})^k = a$

$$(\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b})^k = (\sqrt[k]{a})^k (\sqrt[k]{b})^k = ab$$

پس $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$ ریشه kام ab است. در حالتk فرد طبق تعریف $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$همان $\sqrt[k]{ab}$ است، یعنی $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}=\sqrt[k]{ab}$. حالت k زوج، b,a اعداد مثبتی هستند و $\sqrt[k]{a}\,,\sqrt[k]{b}$نیز اعداد مثبتی هستند پس $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$عددی مثبت و ریشه kام ab است، پس طبق تعریف $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$ همان $\sqrt[k]{ab}$است، یعنی $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}=\sqrt[k]{ab}$.

پس چه در حالت k فرد و چه در حالت k زوج تساوی بالا برقرار است.

۴- $(\sqrt[k]{a})^m=\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{a}\ldots\sqrt[k]{a}=\sqrt[k]{aa\ldots a}=\sqrt[k]{a^m} \qquad (a>\text{۰})$

۵- $(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk}=\left((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n\right)^k=(\sqrt[k]{a})^k=a \quad (a>\text{۰})$

در اولین تساوی ،ویژگی توان رسانی با توان اعداد اعداد طبیعی استفاده شده که به صورت $x^{nk}=(x^n)^k$ است.

در دومین تساوی از ویژگی ریشه گیری استفاده شده است که طبق آن $x = (\sqrt[n]{x})^n$

در سومین تساوی نیز از همین ویژگی ریشه گیری استفاده شده است.

تساوی بالا نشان می دهد $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ یک ریشه nkام a است. در حالت k و n فرد، طبق تعریف $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ همان $\sqrt[nk]{a}$ است، یعنی $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

در حالت n زوج یا k زوج ، a حتماً عددی مثبت است و $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ یک عدد مثبت است و ریشهnkام a است و طبق تعریف $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$همان $\sqrt[nk]{a}$ است، یعتی $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.

بخش هفتم:توان رسانی با توان اعداد گویا

نگاه کلی به بخش

در این بخش یک مفهوم جدید آموزش داده می شودکه توان رسانی با توان اعداد گویا می باشد. برای مفهوم سازی از بستر واقعی رشد باکتری ها در طی زمان استفاده شده است. رشد باکتریها نمایی است و پس از زمانهای صحیح توان صحیح اعداد نشان دهنده وزن باکتریهاست، اما پس از طی زمانهایی که زمان

آن عدد صحیحی نیست در عمل وزنی برای باکتریها وجود دارد اما توان رسانی با توان اعداد غیر صحیح هنوز تعریف نشده اند و این خود انگیزه ای است که توان غیر صحیح از اعداد نیز قابل تعریف است.

مطالب این بخش در قالب طرح یک مسأله و حل آن و انجام یک فعالیت برای تکرار روش حل مسأله داده شده آمده است.

تعریف نمایی توان رسانی در طی انجام فعالیت توسط دانش آموز پیشنهاد می شود. خواص اساسی توان رسانی مستقیماً بیان می شود ولی رسماً اثبات نمی شوند و معلمان در صورت داشتن وقت و دانش آموز علاقه مند می توانند این ویژگی ها را اثبات کنند.

ورود به مطلب

طرح یک مسأله مناسب که در آن توان رسانی با توان اعداد گویا حضور داشته باشد، می تواند انگیزه مناسبی برای چگونگی تعریف توانهای گویا را نیز بدست دهد.

در کتاب از مسأله رشدباکتری ها استفاده شده است که پس از طی زمانهای صحیح ، توانهای صحیح از اعداد وزن باکتریها را بدست می دهد. حال می توان این سؤال را مطرح کرد که پس از گذشت زمانی که مقدار آن صحیح نیست وزن باکتریها چقدر است؟

فعالیت آموزشی

پس از ورود به مطلب و طرح مسأله ای که در کتاب آمده است، شیوه حل مسأله در خود کتاب آمده است و نتیجه گرفته شده است که $۲^{\frac{۱}{۲}}$ باید برابر $\sqrt{۲}$ تعریف شود. برای ادامه این تجربه فعالیتی ارائه شده است که در آن نهایتاً دانش آموزان بتوانند تعریفی کلی برای توان رسانی با توان اعداد گویا بدست آورند.

فعالیت صفحه ۱۹

۱- برای تعریف $۲^{\frac{۱}{۳}}$ با روش مشابه کتاب ، باید به این سؤال پاسخ دهیم که پس از طی $\frac{۱}{۳}$ ساعت وزن باکتری ها چقدر می شوند؟ اگر این مقدار را b بنامیم ، نتیجه می شود که پس از $\frac{۱}{۳}$ساعت وزن

باکتری ها b وپس از $\frac{۲}{۳}$ ساعت وزن باکتری ها $b^{۲}$ وپس از $\frac{۳}{۳}$ ساعت وزن باکتری ها $b^{۳}$ خواهد بود. اما پس از $\frac{۳}{۳}$ساعت که همان یک ساعت است. وزن باکتری ها۲ می شود، یعنی $b^{۳}=۲$ و در نتیجه $b=\sqrt[۳]{۲}$ ، پس $۲^{\frac{۱}{۳}}$ باید $\sqrt[۳]{۲}$ تعریف شود.

۲- برای تعریف $۲^{\frac{۱}{n}}$ اگر همین عملیات را تکرار کنیم و وزن آنها را b بنامیم، پس از هر $\frac{۱}{n}$ ساعت وزن باکتریها b برابر می شود و بترتیب پس از $\frac{۱}{n},\frac{۲}{n},...,\frac{n}{n}$ ساعت وزن باکتریها بصورت

$$b,b^{۲},...,b^{n}$$

خواهد بود. اما $\frac{n}{n}$ ساعت همان یک ساعت است و تعداد باکتریها پس از یک ساعت ۲ است پس $b^{n}=۲$ و در نتیجه $b=\sqrt[n]{۲}$. پس $۲^{\frac{۱}{n}}$ باید $\sqrt[n]{۲}$ تعریف شود.

۳- اگر هر یک ساعت وزن باکتری ها ۳ برابر می شد وپس از نیم ساعت وزن باکتری ها b باشد، مطابق روشهای بالا پس از یک ساعت وزن باکتری ها از یک طرف $b^{۲}$ و از طرف دیگر ۳ است، یعنی $b^{۲}=۳$ و $b=\sqrt{۳}$ ، یعنی $۳^{\frac{۱}{۲}}$ باید $\sqrt{۳}$تعریف شود.

۴- با روش مشابه $۳^{\frac{۱}{۲}},۳^{\frac{۱}{n}}$ ، باید بصورت $\sqrt{۳},\sqrt[n]{۳}$ تعریف شوند.

۵- اگر a عددی مثبت باشدو فرض کنیم وزن باکتری ها در هر ساعت a برابرمی شوند با روش مشابه نتیجه می شود پس از $\frac{۱}{n}$ ساعت وزن آنها $\sqrt[n]{a}$ می شود و مناسب است $a^{\frac{۱}{n}}$ بصورت $\sqrt[n]{a}$ تعریف شود.

۶- اگر دانش آموزان مستقیماً نتوانستندحدسی در این مورد داشته باشند می توانید با حالتهای $a^{\frac{۲}{۳}}$ شروع کنید و با روشهای بالا عمل کنید و نهایتاً تعریف $a^{\frac{p}{n}}=(\sqrt[n]{a})^{p}$ را بدست آورید.

نکته مهمی که در توان رسانی به آن تذکر داده شده است که فقط اعداد مثبت به توان اعداد گویا تعریف می شوند، زیرا اگرچه مثلاً $(-۲)^{\frac{۱}{۳}}$ با فرمول قبلی معنا دارد، $(-۲)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{-۲} = -\sqrt[۳]{۲}$ ، اما $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ و تساوی $(-۲)^{\frac{۲}{۶}} = (\sqrt[۶]{-۲})^{۲}$ معنا ندارد، حتی اگر در توان رسانی $(-۲)^{\frac{۲}{۶}}$ ابتدا $(-۲)^{۲}$ را حساب کنیم حاصل به صورت $(-۲)^{\frac{۲}{۶}} = \sqrt[۶]{(-۲)^{۲}} = \sqrt[۶]{۴} = \sqrt[۳]{۲}$ است.

مقدار بالا با مقدار $(-۲)^{\frac{۱}{۳}}$ فرق دارد. بنابراین در توان رسانی اعداد منفی به توان اعداد گویا حتی در حالتهایی هم که فرمول $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$ معنادار هم باشد، این تعریف، خوشتعریف نیست و قابل قبول نمی باشد.

برای عددصفر نیز توان رسانی با توان اعداد گویا تعریف نمی شود، زیرا صفر به توان صفر معنا دار نیست وتوانهای مثبت نیز همگی صفر می شوند که نهایتاً نتیجه می دهد $۰^{۰}$ هم باید صفر تعریف شود ولی این حالت عملاً تعریف نشده است.

تمرین در کلاس صفحه ۲۰

-۱

$$۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$$
$$۲^{\frac{۲}{۴}} = (\sqrt[۴]{۲})^{۲} = \sqrt[۴]{۲^{۲}} = \sqrt{\sqrt{۴}} = \sqrt{۲}$$
$$۲^{\frac{۳}{۶}} = \sqrt[۶]{۲^{۳}} = \sqrt[۶]{۸} = \sqrt{\sqrt[۳]{۸}} = \sqrt{۲}$$

-۲
$$a^{\frac{kp}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{kp}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^p)^k}} = \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

مسائل صفحه ۲۱

-۱
$$۱^{r} = ۱^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{۱^{p}} = \sqrt[n]{۱} = ۱$$

۲- اگر فرض کنیم $r=\frac{p}{n}$ که p عددی صحیح و n عددی طبیعی است، داریم

$$a^{-r}=a^{\frac{-p}{n}}=(\sqrt[n]{a})^{-p}=\frac{۱}{(\sqrt[n]{a})^{p}}=\frac{۱}{a^{r}}$$

-۳

$$\sqrt[۱۲]{۶۴}=\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۶۴}}=(۶۴)^{۱۲}=(۲^{۶})^{۱۲}=۲^{\frac{۶}{۱۲}}=۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۶}}=(۲^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۸}}=\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$$

-۴

الف) $\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}=۵^{\frac{۱}{۴}}\times ۵^{\frac{۱}{۱۲}}=۵^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}}=۵^{\frac{۴}{۱۲}}=۵^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۵}$

ب) $\sqrt[۶]{\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۱۴}}=۷^{\frac{۱}{۱۸}}\times ۱۴^{\frac{۱}{۱۸}}=۹۸^{\frac{۱}{۱۸}}=\sqrt[۱۸]{۹۸}$

ج) $\sqrt[۵]{۴}\div\sqrt[۸]{۸}=\frac{۴^{\frac{۱}{۵}}}{۸^{\frac{۱}{۸}}}=\frac{۲^{\frac{۲}{۵}}}{۲^{\frac{۳}{۸}}}=۲^{\frac{۲}{۵}-\frac{۳}{۸}}=۲^{\frac{۱۶-۱۵}{۴۰}}=۲^{\frac{۱}{۴۰}}=\sqrt[۴۰]{۲}$

-۵ $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}=a^{\frac{۱}{m}}a^{\frac{۱}{n}}=a^{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}}=a^{\frac{m+n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{m+n}}$

۶- اگر $r=\frac{p}{n}$ آنگاه ، $a^{r}=(\sqrt[n]{a})^{p}$, $\sqrt[n]{a}$ عددی مثبت است و به توان p که برسد باز هم عددی مثبت است.

-۷

$$۱ < a \Rightarrow a < a^{۲} \Rightarrow a^{۲} < a^{۳} \Rightarrow a^{۳} < a^{۴} \Rightarrow \dots$$
$$۱ > a \Rightarrow a > a^{۲} \Rightarrow a^{۲} > a^{۳} \Rightarrow a^{۳} > a^{۴} \Rightarrow \dots$$

بخش هشتم : توان رسانی با توان اعداد حقیقی

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش تعمیم مفهوم توان رسانی با توان اعداد حقیقی است . ابتدا این عمل توان رسانی باید معنادار شود و دانش آموزان بپذیرند توان رسانی مانند $۲^{\sqrt{۲}}$ معنا دارد و سپس مقداری برای آن تعیین شود.

روش این بخش طرح مسأله و سعی در حل مسأله توسط دانش آموز است البته این عمل تقریباً به صورت داستانی انجام می شود تا دانش آموزان در این تجربه شرکت کنند و در جای دیگر خودشان بتوانند این تجربه را تکرار کنند.

توان رسانی با توان اعداد حقیقی پیچیده تر از توان گویاست و نمی توان به طور دقیق وارد آن شد. در این بخش این مفهوم توسط بستر واقعی رشد باکتری ها معنا دار شده است ولی برای یافتن مقدار این توان رسانی ها به یک نکته مهم اشاره شده است که اصولاً نمی توان به تمام اعداد حقیقی مستقیماً دسترسی داشت و برای شناخت اعداد حقیقی باید تقریبات اعشاری آنها را بشناسیم.

برای محاسبه عددی مانند $۲^{\sqrt{۲}}$ نیز در واقع باید بتوانیم تقریبات اعشاری آن را بدست آوریم. این عمل نیز به کمک دنباله تقریبات اعشاری و دنباله هایی که به اعداد نزدیک می شوند، قابل انجام است. عملاًدر تعریف دقیق توان رسانی با توان اعداد حقیقی با حد گیری سروکار خواهیم داشت که در این بخش بطور شهودی با استفاده از دنباله های نزدیک شونده در مورد آن صحبت شده است.

خواص اساسی توان رسانی نیز مستقیماً ارائه شده است تا در محاسبات از آنها استفاده شود.

ورود به مطلب

در اینجا می توان با انگیزه تعمیم این بحث را مطرح کرد. یا آن که در بستر واقعی رشد باکتری ها از میزان باکتریها پس از گذشت زمان به اندازه یک عدد اصم پرسش کرد. از این طریق می توان دانش آموزان را قانع کرد که توانهای حقیقی معنادار هستند ولی محاسبه مقدار دقیق امکانپذیر نیست و باید با تقریبات اعشاری در مورد این گونه اعداد صحبت کرد.

فعالیت آموزشی

این بخش عملاً فعالیت خاصی در بر ندارد و با یک گفتگوی دو طرفه بین معلم و دانش آموز مسأله ای مطرح وحل می شود و مثالهایی ارائه می شود.

مسائل صفحه ۲۳

۱-

الف) $۲^{۲\sqrt{۳}}$

ب) $$\left(\sqrt{۳}^{\sqrt{۳}}\right)^{\sqrt{۱۲}} = (\sqrt{۳})^{\sqrt{۳۶}} = (\sqrt{۳})^{۶} = ((\sqrt{۳})^{۲})^{۳} = ۳^{۳} = ۲۷$$

ج) $$\left(\sqrt{۱۵}^{۲-\sqrt{۲}}\right)^{۲+\sqrt{۲}} = \sqrt{۱۵}^{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})} = \sqrt{۱۵}^{۴-۲} = ۱۵$$

د) $$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}} = \sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱} = (۳-۲)^{\sqrt{۲}+۱} = ۱$$

۲- باید معادله $x^{\sqrt{۲}} = ۲$ را حل کنیم، طبق راهنمایی ، طرفین را به توان $\sqrt{۲}$ می رسانیم.

$$(x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۲^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x^{۲} = ۲^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x = \sqrt{۲^{\sqrt{۲}}} = ۲^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

۳- $$\sqrt{a^b} = (a^b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{b}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^b = (\sqrt{a})^b$$

$$(\frac{a}{c})^b = (ac^{-1})^b = a^b c^{-b} = \frac{a^b}{c^b}$$

$$\frac{a^b}{a^d} = a^b \times a^{-d} = a^{b-d}$$

$$a^{-b} \times a^b = a^{-b+b} = a^0 = 1 \Rightarrow a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

۴- $$a^b = a^{\frac{b}{2}\times 2} = (a^{\frac{b}{2}})^2$$

توان دوم هر عددی مثبت است ، پس عددی مثبت است.

تدوین: غنی پور- شهریور ۱۳۸۸