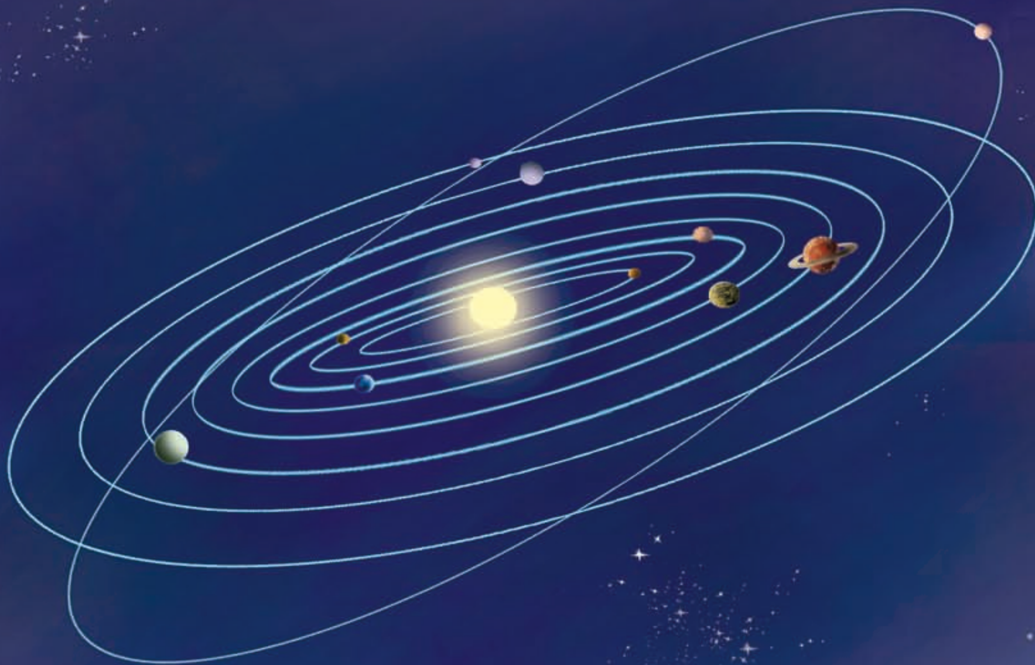
۲

مجموعه ها



سال‌ها تصور می‌شد پلوتون جزء سیارات منظومه شمسی است. اخیراً انجمن جهانی نجوم اعلام نموده است که پلوتون عضوی از مجموعه سیارات منظومه شمسی نیست. با دقت در شکل بالا چه دلیلی برای توجیه این نقطه نظر می‌توان ارائه کرد؟

مسئله گروه‌های دانش‌آموزی

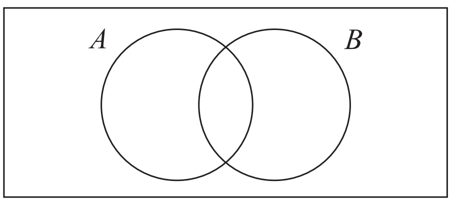
بسیاری از مفاهیم ریاضی از طریق حل مسائلی که بشر با آن روبه‌رو شده است به‌وجود آمده‌اند. شما نیز با حل مسائلی که با آن‌ها روبه‌رو می‌شوید می‌توانید مفاهیم جدید ریاضی را کشف کنید. محمد، دانش‌آموزی است که برای حل مسئله‌ای که با آن روبه‌رو شده بود توانست نخست مفهوم مجموعه‌ها و سپس مطالب دیگر وابسته به مجموعه‌ها را به‌دست آورد.

محمد مدرسه‌ی خود را عوض کرده بود و وقتی وارد کلاس جدید شد، متوجه شد که در این کلاس دو گروه ورزشی یکی فوتبال و دیگری والیبال، تشکیل شده است. او فهمید، شرکت در این گروه‌ها داوطلبانه بوده و هرکس با میل خود می‌توانسته عضو هرکدام از این دو گروه بشود یا نشود.

این گروه‌ها A و B نام‌گذاری شده بود و هر گروهی با اعضایش مشخص می‌شد. محمد علاقه داشت بداند که هرکدام از این گروه‌ها چند عضو دارند. او با شمارش تعداد دانش‌آموزان کلاس فهمید که کلاس آن‌ها بدون خودش، ۳۶ دانش‌آموز دارد. ابتدا فکر کرد که تعداد اعضای گروه‌های A و B روی‌هم، همان ۳۶ نفر است، ولی زود متوجه شد که ممکن است برخی دانش‌آموزان در هیچ گروهی شرکت نکرده باشند.

او در زمان تمرین این گروه‌ها متوجه شد که ۴ نفر در هیچ کدام از این گروه‌ها شرکت نمی‌کنند و نتیجه گرفت تعداد اعضای گروه‌های A و B روی هم برابر ۳۲ = ۴ − ۳۶ است. محمد با شرکت در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید تعداد اعضای گروه A ، ۲۱ نفر است. او فکر کرد چون تعداد اعضای این دو گروه روی هم ۳۲ نفر است، پس گروه B ، ۲۱ − ۳۲ یعنی ۱۱ عضو دارد.

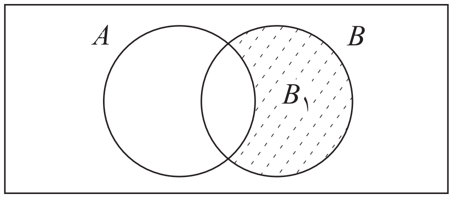
اما، یکی از افراد گروه B به محمد گفت که نتیجه‌گیری او اشتباه است و تعداد اعضای گروه B بیشتر از ۱۱ نفر است. محمد با کمی تأمل دریافت که نتیجه‌گیری او بر مبنای این فرض بوده است که دو گروه A و B عضو مشترکی ندارند در حالی که ممکن است برخی دانش‌آموزان خواسته باشند در هر دو گروه عضویت داشته باشند. محمد برای تشخیص وضعیت این دو گروه شکل زیر را رسم کرد.



محمد از روی این شکل نتیجه گرفت، اطلاعات او برای یافتن تعداد اعضای گروه B کافی نیست و او باید تعداد اعضای مشترک بین این دو گروه را بداند.

محمد با شرکت مجدد در یکی از تمرین‌های گروه A فهمید ۶ نفر از آن‌ها عضو گروه B هم هستند. برای

حل این مسئله، محمد فکر کرد که می‌توانیم مسئله را به حالتی برگردانیم که دو گروه عضو مشترکی نداشته باشند و از راه حل قبلی استفاده کنیم. اعضای مشترک بین دو گروه را موقتاً از گروه B خارج می‌کنیم و گروه $B_۱$ را می‌سازیم.



گروه $B_۱$ و گروه A عضو مشترکی ندارند و اعضای گروه‌های $B_۱$ و A روی هم، اعضای گروه A و B روی هم هستند. پس گروه $B_۱$ به اندازه‌ی ۱۱=۲۱−۳۲ عضو دارد. بنابراین، گروه B به اندازه ۱۷=۶+۱۱ عضو دارد.

راه دیگری هم برای حل این مسئله به نظر محمد رسید. او تعداد اعضای گروه B را x نامید و گفت در شمارش تعداد اعضای دو گروه، اگر اعضای مشترک را یک بار به عنوان عضو A و یک بار به عنوان عضو B بشماریم، حاصل x+۲۱ است. اما، چون در این شمارش ۶ نفر دوبار شمرده شده‌اند، تعداد واقعی ۶−x+۲۱ است. ولی تعداد واقعی اعضای دو گروه روی هم برابر ۳۲ بود، پس ۳۲=۶−x+۲۱. از این تساوی نتیجه می‌شود ۱۷=x.

فعالیت

احمد و اکبر دانش‌آموزان یک مدرسه‌اند و هرکدام دوستانی در مدرسه دارند. در فعالیت زیر می‌خواهیم تعداد دوستان احمد و اکبر را به‌دست آوریم.

۱ــ تعداد دانش‌آموزان مدرسه ۱۴۲ نفر است که ۹۴ نفر از آنان نه دوست احمد هستند و نه دوست اکبر. دوستان احمد و دوستان اکبر روی هم چند نفرند؟

۲ــ اگر بدانید احمد ۲۳ دوست دارد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟

۳ــ اگر تعداد دوستان مشترک احمد و اکبر ۴ نفر باشد، آیا می‌توانید بگویید اکبر چند دوست دارد؟

مجموعه‌ها

در حل مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی با دسته‌هایی از دانش‌آموزان روبه‌رو شدیم. در مسائل دیگر نیز دسته‌های دیگری از اشیا دیده می‌شوند. این دسته‌های مشخص شده از اشیاء را مجموعه می‌نامند.

هر دسته‌ی مشخص شده از اشیا را یک **مجموعه** می‌نامند و آن اشیا را **اعضای** آن مجموعه می‌نامند.

مثال: در مسئله گروه‌های دانش‌آموزی، گروه‌های A و B هرکدام یک مجموعه بوده‌اند.

مثال: اعداد طبیعی یک رقمی یک مجموعه را تشکیل می‌دهند که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

مثال: دوستان حمید با هم یک مجموعه را می‌سازند که به آن مجموعه‌ی دوستان حمید می‌گوییم.

در زیر نمونه‌های دیگری از مجموعه‌ها را می‌بینید.

{ علی، رضا، احمد، جواد، کریم، اصغر}= تیم فوتبال مدرسه

{۲ ، ۴ ، ۸ ، ۶ }= مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی زوج

{ا،ی،م،ک،گ،ل،س،ص،ع،هـ،ح،ط،ر،د،و}= مجموعه‌ی حروف الفبای فارسی بی‌نقطه

{عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، اورانوس،نپتون}= مجموعه‌ی سیارات منظومه شمسی

لازم نیست که اعضای یک مجموعه ارتباط خاصی با هم داشته باشند. برای مثال به مجموعه‌ی زیر توجه کنید :

{سعدی، حافظ، ۴ ، ۲ ، ۳۵، a، x، تهران}

مثال: عبارت «انسان‌های قد بلند» مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند، زیرا چنین انسان‌هایی به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و برای برخی انسان‌ها نمی‌توانیم بگوییم قد بلند هستند یا نه.

معمولاً، برای هر مجموعه‌ای نامی انتخاب می‌شود تا بهتر بتوان در مورد آن صحبت کرد.

مثال: در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی نام‌های انتخاب شده برای دو گروه ورزشی، A و B بود.

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی را D بنامیم، می‌نویسیم : $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$

برای برخی از مجموعه‌های اعداد نیز نام‌های خاصی انتخاب شده است. مثلاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهند ؛ یعنی :

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

توجه داشته باشید که در بالا منظور از «...» ادامه اعداد طبیعی هستند که انتها ندارند. برای مجموعه‌ی اعداد صحیح نیز نام $\mathbb{Z}$ انتخاب شده است ؛ یعنی :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

مجموعه‌ی اعداد گویا را با Q و مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهند.
عضویت یک شیء در یک مجموعه را با استفاده از نماد «$\in$» بیان می‌کنند. مثلاً برای بیان این که ۲ یکی از اعضای $\mathbb{N}$ است می‌نویسیم : $۲ \in \mathbb{N}$ و این جمله را به صورت «۲ عضو $\mathbb{N}$ است» می‌خوانیم. مثلاً :

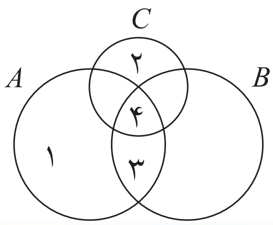
$$۱۲ \in \mathbb{N} \ , \ -۵ \in \mathbb{Z} \ , \ -\frac{۳}{۷} \in Q \ , \ \sqrt{۱۱} \in \mathbb{R}$$

برای بیان این که شیء عضو مجموعه‌ای نیست، از نماد $\notin$ استفاده می‌شود. مثلاً، برای بیان این که «۳ −» یک عدد طبیعی نیست، می‌نویسیم $-۳ \notin \mathbb{N}$ و آن را به صورت «(۳−) عضو $\mathbb{N}$ نیست» می‌خوانیم. مثلاً :

$$\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{Z} \ , \ \sqrt{۵} \notin Q \ , \ -۸ \notin \mathbb{N} \ , \ \frac{\pi}{۲} \notin Q$$

تمرین در کلاس

در شکل زیر وضعیت عضو بودن یا نبودن عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را نسبت به مجموعه‌های A، B و C مشخص کنید.



آیا مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی نداشته باشد؟ بلی، ریاضیدانان وجود چنین مجموعه‌ای را پذیرفته‌اند و آن را مجموعه‌ی تهی نامیده‌اند و نام $\varnothing$ را برای آن انتخاب کرده‌اند.
مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی بین ۳۰ و ۴۰ که بر ۲۱ بخش‌پذیرند، مجموعه‌ی تهی است.

تساوی مجموعه‌ها

برای مشخص کردن مجموعه‌ها راه‌های مختلفی وجود دارد. ممکن است دو مجموعه را با دو روش مختلف مشخص کنیم و سپس متوجه شویم این دو مجموعه اعضای یکسانی دارند. در این حالت گوییم دو **مجموعه مساوی**‌اند.
مثال: فرض کنید علی و حسن با یکدیگر دوست هستند. هر یک از آن‌ها تا امروز انواعی از غذاها را خورده‌اند. مجموعه‌ی غذاهایی را که علی خورده است A و مجموعه‌ی غذاهایی را که حسن خورده است B می‌نامیم. اگر بررسی کنیم و متوجه شویم که هر غذایی که علی خورده است، حسن هم خورده است و هر غذایی که حسن خورده است، علی هم خورده است، دو مجموعه‌ی A و B اعضای یکسانی

خواهند داشت و این دو مجموعه مساوی‌اند و می‌نویسیم A=B.

در این مثال، اگر چه شیوه‌ی مشخص کردن اعضای دو مجموعه‌ی A و B با هم فرق داشت، ولی چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با هم مساوی‌اند.

> اگر هر عضو مجموعه‌ی A عضوی از مجموعه‌ی B و هر عضو مجموعه‌ی B عضوی از مجموعه‌ی A باشد، این دو مجموعه را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم A=B.

مثال: دو مجموعه‌ی A و B را به شکل زیر در نظر بگیرید :

$$\{۱,۲,۶\} = \{۱,۲,۲,۶,۶,۶\}$$

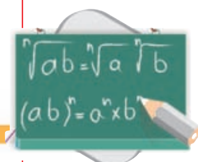
در مجموعه سمت راست بالا، برای مشخص کردن اعضای مجموعه، برخی اعضا چند بار نوشته شده‌اند. این عمل عضو جدیدی به مجموعه اضافه نمی‌کند و مجموعه‌ی سمت راست با مجموعه‌ی سمت چپ مساوی است.

مثال:

$$A = \{۱,۲,۶,۸,۱۲,۱۹\}$$

$$B = \{۱۹,۶,۱,۲,۸,۱۲\}$$

در مجموعه‌های مثال بالا، نام اعضای آن‌ها با ترتیب‌های مختلفی نوشته شده است. با این حال چون این دو مجموعه، اعضای یکسانی دارند با یکدیگر مساوی‌اند ؛ یعنی A=B.



تمرین در کلاس

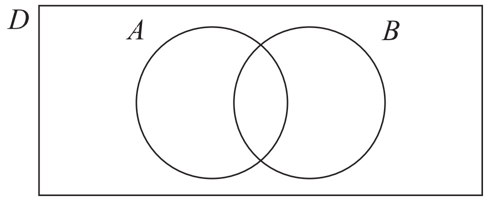
۱ــ جواد و حسین هر دو در یک کلاس درس می‌خوانند، آیا مجموعه‌ی معلمین جواد با مجموعه‌ی معلمین حسین مساوی است؟

۲ــ آیا مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی با مجموعه‌ی اعداد فرد یک رقمی مساوی است؟

۳ــ مجموعه‌ی انسان‌هایی که در کره ماه زندگی می‌کنند، مساوی کدام مجموعه است؟

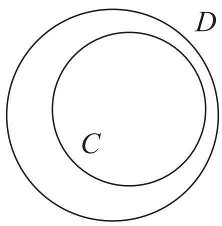
زیر مجموعه

در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی، اگر مجموعه‌ی کلیه افراد کلاس را با D نشان دهیم، وضعیت گروه‌های A و B نسبت به D چگونه است؟



هر عضو گروه یا مجموعه‌ی A یک دانش‌آموز کلاس است، پس عضوی از D است. در چنین حالتی گوییم A زیرمجموعه‌ی D است. به همین ترتیب هرعضو B نیز عضوی از D است، پس B نیز زیرمجموعه‌ای از D است.

اگر C و D دو مجموعه باشند به‌طوری که هر عضو C، عضو D نیز باشد، در این صورت گوییم C یک **زیرمجموعه‌ی** D است.



برای بیان این که مجموعه‌ی C زیرمجموعه‌ی D است، می‌نویسیم «$C \subset D$» و آن را چنین می‌خوانیم : «C زیرمجموعه‌ی D است».

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد یک رقمی زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰ است.

$$\{۱,۳,۵,۷,۹\} \subset \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$

مثال: مجموعه‌ی دانش‌آموزان کلاس شما، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی دانش‌آموزان مدرسه‌ی شما است.

مثال: مجموعه‌ی افراد روستایی ایران، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی همه ایرانی‌ها است.

تمرین در کلاس

۱ــ یک مجموعه‌ی ۳ عضوی بسازید و آن را A بنامید.

۲ــ از A یک عضو را حذف کنید و مجموعه‌ی جدید را B بنامید. وضعیت A و B نسبت به هم چگونه است؟

۳ــ عضو دیگری را به B اضافه کنید و مجموعه‌ی به دست آمده را C بنامید. وضعیت B و C نسبت به هم چگونه است؟ وضعیت A و C نسبت به هم چگونه است؟

۴ــ آیا ممکن است دو مجموعه، هرکدام زیر مجموعه‌ی دیگری باشد؟ چه وقت این اتفاق می‌افتد؟

۵ــ آیا ممکن است از دو مجموعه، هیچ کدام زیرمجموعه دیگری نباشد؟ مثال بزنید.

۶ــ آیا هر عدد طبیعی یک عدد صحیح است؟ وضعیت $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ نسبت به هم چگونه است؟

۷ــ آیا هر عدد صحیح یک عدد گویا است؟ وضعیت $\mathbb{Z}$ و Q نسبت به هم چگونه است؟

۸ــ آیا هر عدد گویا یک عدد حقیقی است؟ وضعیت Q و $\mathbb{R}$ نسبت به هم چگونه است؟

مثال: کلیه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ را تعیین کنید.

برای به دست آوردن زیرمجموعه‌های یک مجموعه، می‌توانیم با شروع از خود مجموعه و حذف یک یک اعضای آن، در کلیه‌ی حالاتی که امکان‌پذیر است، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه را به‌دست آوریم.

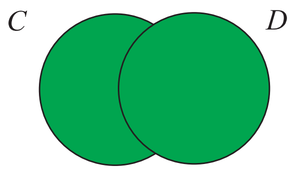
مثلاً، تمام زیرمجموعه‌های $A=\{a,b,c\}$ عبارت‌اند از :

$$\{a,b,c\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\varnothing$$

اجتماع مجموعه ها

در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی، اگر دو گروه A و B جلسه‌ی مشترکی تشکیل دهند، مجموعه‌ای از دانش‌آموزان تشکیل می‌شود که آن را اجتماع دو مجموعه A و B می‌نامند.

اگر C و D دو مجموعه باشند، مجموعه‌ی جدیدی را که اعضای آن متشکل از اعضای این دو مجموعه با هم است، **اجتماع** C و D می‌نامند و با **C∪D** نشان می‌دهند.



C∪D

مثال: معلم جغرافی از رضا و احمد خواست درباره‌ی شهرهایی که به آن سفر کرده‌اند گزارشی بنویسند. اگر رضا به شهرهای اصفهان، زنجان، اردبیل، اهواز و تهران سفر کرده باشد و احمد شهرهای اصفهان، خرم‌آباد، تبریز، سنندج و اهواز را دیده باشد، معلم جغرافی در مورد کدام شهرها از این دو نفر گزارش دریافت کرده است؟ جواب این سؤال، اجتماع مجموعه‌ی شهرهایی است که رضا و احمد به آن‌ها سفر کرده‌اند. اگر مجموعه‌ی شهرهایی که رضا دیده است را با A و مجموعه‌ی شهرهایی که احمد دیده است را با B نشان دهیم، خواهیم داشت :

A∪B = { اصفهان , زنجان , اردبیل, اهواز, تهران } ∪ { اصفهان , خرم‌آباد , تبریز , سنندج , اهواز }

= { اصفهان , زنجان , اردبیل , تبریز , اهواز, تهران , خرم‌آباد , سنندج }

مثال: اجتماع مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی زوج و مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ را که بر ۳ بخش‌پذیرند به دست آورید.

{۲,۴,۶,۸} ∪ {۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸} = {۲,۴,۶,۸,۳,۹,۱۲,۱۵,۱۸}

تمرین در کلاس

۱ــ اگر A = {۱,۵,۹} و B = {۵,۷,۹} ، درستی جملات زیر را نشان دهید.

الف) A∪A = A .

ب) A∪B = B∪A .

ج) A⊂(A∪B) و B⊂(A∪B) .

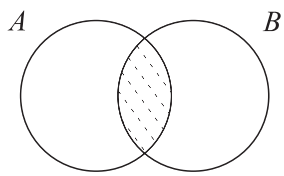
۲ــ یک مجموعه C معرفی کنید که A⊂C و B⊂C . نشان دهید (A∪B)⊂C .

۳ــ اگر به‌جای مجموعه‌های بالا، مجموعه‌های دیگری قرار می‌دادیم باز هم روابط بالا درست بودند؟

اشتراک مجموعه‌ها

در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی دیدیم که افراد مشترک بین دو گروه A و B نقش مهمی در حل مسئله داشتند. مجموعه این افراد مشترک را اشتراک آن دو مجموعه می‌نامند.

برای دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ی اشیایی را که هم عضو A و هم عضو B هستند، اشتراک A و B می‌نامند و با $A \cap B$ نشان می‌دهند.



$A \cap B$

مثال: اشتراک مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی و اعداد طبیعی زوج یک رقمی مجموعه‌ی {۲} است.

$$\{۲,۳,۵,۷\} \cap \{۲,۴,۶,۸\} = \{۲\}$$

مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی ایرانی‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی ریاضی‌دانان جهان باشد، $A \cap B$ مجموعه همه ریاضی‌دانان ایرانی است.

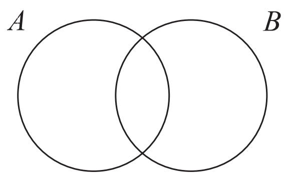
مثال: اگر A مجموعه‌ی همه‌ی انسان‌ها و B مجموعه‌ی همه‌ی موجودات آب‌زی باشد، $A \cap B$ هیچ عضوی ندارد و برابر مجموعه تهی است، یعنی $A \cap B = \varnothing$.

دو مجموعه‌ی ناتهی را که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ی تهی است، دو **مجموعه‌ی مجزا** یا **جدا از هم** می‌نامند.

مثال: مجموعه‌ی دانش‌آموزان کلاس اول ابتدایی و مجموعه‌ی دانش‌آموزان دبیرستانی، دو مجموعه‌ی مجزا هستند.

تمرین در کلاس

۱ــ با توجه به شکل زیر، درستی یا نادرستی هر یک از جملات ریاضی زیر را تعیین کنید.



$A \subset (A \cap B)$ ☐	$(A \cap B) = (B \cap A)$ ☐	$(A \cap B) \subset A$ ☐
$(A \cap A) = A$ ☐	$(A \cap B) \subset (A \cup B)$ ☐	$A \subset (A \cup B)$ ☐

۲ــ برای هر یک از جملات ریاضی زیر یک شکل رسم کنید.

الف) $A \cap B = \varnothing$

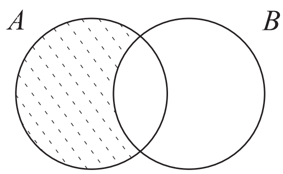
ب) $A \subset B \subset C$

ج) $B \cap C \neq \varnothing$, $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$

تفاضل مجموعه‌ها

مجموعه‌ی دانش‌آموزان سال اول یک دبیرستان را با A و مجموعه‌ی دانش‌آموزانی که قد آن‌ها بلندتر از ۱۷۰ سانتی‌متر است را با B نشان داده‌اند. یک روز برای انتخاب اعضای تیم بسکتبال، مربی ورزش همه‌ی دانش‌آموزان با قد بیش از ۱۷۰ سانتی‌متر را در حیاط نگه داشت. بنابراین، دانش‌آموزانی که آن روز در کلاس اول دبیرستان حاضر بودند، آن‌هایی بودند که عضو مجموعه‌ی A بودند ولی عضو مجموعه‌ی B نبودند. مجموعه‌ای را که به این شکل ساخته می‌شود تفاضل B از A می‌نامند.

برای دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ی اشیایی را که در A هستند، ولی در B نباشند، **تفاضل** B از A می‌نامند و با $\mathbf{A-B}$ نشان می‌دهند.



$\mathbf{A-B}$

مثال: به یاد دارید که در مسئله‌ی گروه‌های دانش‌آموزی، برای محاسبه‌ی تعداد اعضای گروه B، آن دسته از اعضای A را که در B بودند از گروه B حذف کردیم و گروه B_1 را ساختیم. این عمل همان تفاضل مجموعه A از مجموعه B بود و $B_1 = B - A$.

مثال:

$$\{a,b\} - \{b\} = \{a\} \quad , \quad \{x,y,z\} - \{a,b\} = \{x,y,z\} \quad , \quad \{b\} - \{b\} = \varnothing$$

مثال: سه مجموعه A، B و C را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \{a,c,d,f,g\} \quad , \quad B = \{a,f,t,w,z\} \quad , \quad C = \{1,4,7\}$$

چند نمونه از تفاضل این مجموعه‌ها به شکل زیر است:

$$A - B = \{c,d,g\}$$

$$B - A = \{t,w,z\}$$

$$A - C = \{a,c,d,f,g\} = A$$

مثال: اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ باشد که بر ۲ بخش‌پذیرند و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ باشد که بر ۴ بخش‌پذیرند، آن‌گاه $A - B$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ است که زوج هستند ولی بر ۴ بخش‌پذیر نیستند.

$$A - B = \{2,6,10,14,18\}$$

مثال: اگر A مجموعه‌ی دانش‌آموزان دبیرستان شما و B مجموعه‌ی دانش‌آموزان دبیرستانی در ایران باشد، $A-B$ مجموعه‌ی تهی است و $B-A$ مجموعه‌ی همه دانش‌آموزان دبیرستانی خارج از مدرسه شما است.

مثال: اگر A مجموعه‌ی ایرانی‌هایی باشد که تحصیلات آن‌ها بالای دیپلم است و B مجموعه‌ی کارگران ایرانی باشد، $A-B$ مجموعه‌ی ایرانی‌های با تحصیلات بالای دیپلم است که کارگر نیستند و $B-A$ مجموعه‌ی کارگران ایرانی با تحصیلات دیپلم یا زیر دیپلم است.

مثال: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گنگ است. $\mathbb{R}-\{۰\}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مخالف صفر است.

توجه کنید $\mathbb{R}-\{۰\}$ را به‌صورت $\mathbb{R}-۰$ ننویسید.

مسائل

۱ــ مجموعه‌های زیر را درنظر بگیرید.

$X =$ { ایلام، پاوه، اردبیل، سنندج، کرمانشاه، آبادان، زابل، زاهدان، تبریز، ارومیه، بوشهر، بندرعباس }

شهرهای شمال غربی ایران $= A$ شهرهای جنوب شرقی ایران $= B$

شهرهای جنوب غربی ایران $= C$ شهرهای غربی ایران $= D$

شهرهای جنوبی ایران $= E$

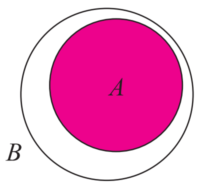
مجموعه‌های $A\cap X$ ، $B\cap X$ ، $C\cap X$ ، $D\cap X$ و $E\cap X$ را با اعضای آن‌ها مشخص کنید.

۲ــ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶\}$ حاصل هریک از عبارات زیر را به‌دست آورید.

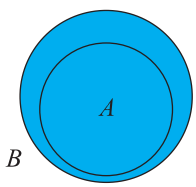
الف) $A\cup B$ ب) $A\cap B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

هـ) $(A\cup B)-(A\cap B)$ و) $[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$

۳ــ هریک از مجموعه‌های داده شده در سمت چپ را در صورت وجود نمودار نظیر برای آن، به نمودار نظیرش وصل کنید.

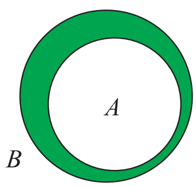


$A\cap B$



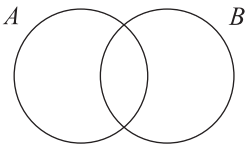
$A\cup B$

$A-B$

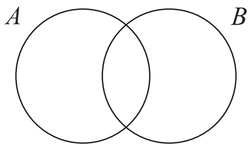


$B-A$

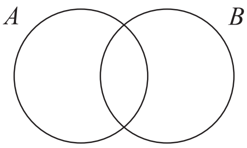
۴ــ مجموعه‌های داده شده را با هاشور زدن مشخص کنید.



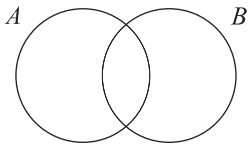
$(A-B)\cup(B-A)$



$A-B$

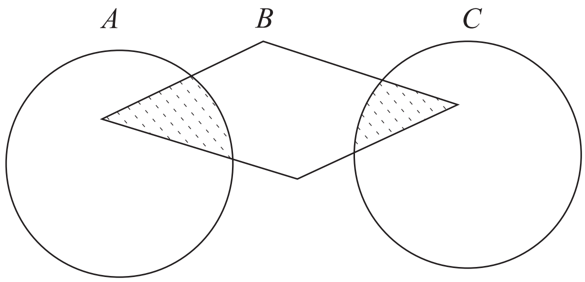


$A-(A\cap B)$



$(A\cup B)-A$

۵ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، قسمت‌های هاشور خورده‌ی شکل را نشان می‌دهد؟



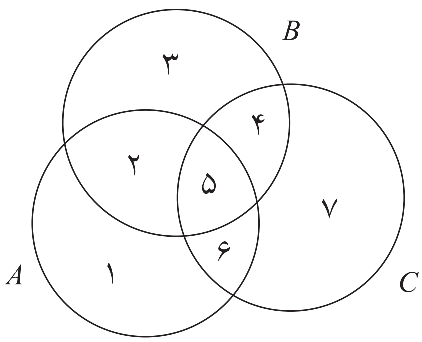
☐ $A\cap B\cap C$

☐ $(A-B)\cup(C-B)$

☐ $(A\cup C)-B$

☐ $B\cap(A\cup C)$

۶ــ با توجه به شکل بگویید کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نشان‌دهنده‌ی $(A-B)\cup(B\cap C)$ است.



☐ $\{۱,۶\}$

☐ $\{۱,۲,۳,۴,۶\}$

☐ $\{۱,۶,۵,۴\}$

۷ــ دو مجموعه $A=\{۷,x,-y\}$ و $B=\{۷,-۲,۵\}$ مساوی هستند. مقدار xy را به‌دست آورید.

۸ــ اگر داشته باشیم $A=\{۲,۷,۱۱,۱۳,۱۷\}$ و $B=\{۳,۶,۱۱,۱۳,۱۷\}$، مجموعه‌ی $A-B$ را بنویسید.

دانش‌آموزی این مسئله را چنین حل کرده است :

$$A-B=\{۲,۷,\cancel{۱}۱,\cancel{۱}۳,\cancel{۱}۷\}-\{۳,۶,\cancel{۱}۱,\cancel{۱}۳,\cancel{۱}۷\}=\{۲,۳,۶,۷\}$$

دانش‌آموز مرتکب چه اشتباهی شده است؟ پاسخ درست چیست؟

۹ــ معلم پرسید : آیا عبارت «چهار عدد زوج متوالی» یک مجموعه را نشان می‌دهد؟ دانش‌آموزی گفت بله، مثلاً $\{۲,۴,۶,۸\}$. به‌نظر شما آیا پاسخ او صحیح بوده است؟ در صورت اشتباه بودن، علت اشتباه را توضیح دهید.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ی $\{a\}$ یک عضو و مجموعه‌ی $\{۱,۵\}$ دو عضو دارد. مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی ۹ عضو دارد. مجموعه حروف الفبای فارسی ۳۲ عضو دارد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد و عمل شمارش آن‌ها نهایتاً به انتها برسد، گوییم آن مجموعه متناهی است ؛ در غیر این‌صورت گوییم آن مجموعه نامتناهی است.

مثال: مجموعه‌ی سیارات منظومه شمسی متناهی است و تعداد اعضای آن ۸ است.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج کمتر از ۹ متناهی است و تعداد اعضای آن ۴ است.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی زوج متناهی نیست.

مجموعه‌ی تهی نیز متناهی محسوب می‌شود و تعداد اعضای آن صفر است. برخی مجموعه‌ها، اگرچه متناهی هستند، ولی تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌دانیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی مورچگان کره‌ی زمین، یا مجموعه‌ی اتم‌های موجود در جو، اگرچه متناهی هستند، اما مجموعه‌های بزرگی هستند و تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌دانیم.

مجموعه‌های نامتناهی مجموعه‌هایی هستند که اگر یکی یکی اعضای آن‌ها را از مجموعه خارج کنیم، این عمل هیچ‌گاه به آخر نمی‌رسد. به‌عنوان مثال، $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند.

مشخص کردن مجموعه‌ها

برای مشخص کردن یک مجموعه باید عضوهای آن مجموعه را معرفی کنیم. درصورتی که تعداد عضوهای یک مجموعه کم باشد، می‌توان اعضای آن مجموعه را یکی یکی معرفی کرد. این عمل با نوشتن اعضای آن مجموعه بین $\{\}$ انجام می‌شود. مثلاً، مجموعه‌های زیر با همین روش معرفی شده‌اند:

$$A=\{a,b,c\} \quad \text{و} \quad B=\{\text{رودکی، سعدی، مولوی، فردوسی}\} \quad \text{و} \quad C=\{0,-4,8,\sqrt{24}\}$$

اما اگر یک مجموعه نامتناهی باشد، یا تعداد اعضای مجموعه‌ای بسیار زیاد باشد، نمی‌توان از روش بالا استفاده کرد. در این صورت یک روش دیگر برای مشخص کردن اعضای یک مجموعه، پیدا کردن یک ویژگی مشترک بین اعضای آن مجموعه است تا از طریق آن، اعضای آن مجموعه مشخص شوند.

برای مثال، برای مشخص کردن مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی، می‌توانیم آن‌ها را مجموعه‌ای از اعداد طبیعی درنظر بگیریم که از ۱۰۰ کوچک‌تر و از ۹ بزرگ‌ترند. اگر این مجموعه را E بنامیم این مطلب را به دو صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$E=\{x\in\mathbb{N} \mid x>9 \text{ و } x<100\}=\{x \mid x>9 \text{ و } x<100 \text{ و } x\in\mathbb{N}\}$$

جمله‌ی بالا به این صورت خوانده می‌شود: «E مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است که از ۹ بزرگ‌تر و از ۱۰۰ کوچک‌ترند.»

مثال: مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت را می‌توانیم به‌صورت $\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x\}$ بنویسیم.

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد گویایی را که قدرمطلق آن‌ها از ۵ کم‌تر است با D نشان دهیم، داریم:

$$D=\{r\in\mathbb{Q} \mid |r|<5\}$$

یک روش دیگر برای مشخص کردن مجموعه‌ها، معرفی شکل کلی عضوهای آن مجموعه است. برای مثال، هر عدد طبیعی زوج به شکل $2k$ است، که k یک عدد طبیعی است. با این روش مجموعه اعداد طبیعی زوج را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

عبارت بالا به‌صورت «مجموعه‌ی اعداد به‌صورت $2k$ که k در $\mathbb{N}$ قرار دارد» خوانده می‌شود.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد عبارت است از $\{2k-1 \mid k\in\mathbb{N}\}=\{x \mid x=2k-1\ ,\ k\in\mathbb{N}\}$.

مثال: مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجذور کامل عبارت است از $\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}$.

مسائل

۱ــ هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

الف) $A=\left\{\frac{۱}{x}\middle| x\in\mathbb{N}, x<۵\right\}$

ب) $B=\left\{۴x\middle| x\in\mathbb{Z}, x>-۲, x<۴\right\}$

ج) $C=\left\{\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}\middle| x\in\mathbb{Z}, x>-۲, x<۲\right\}$

۲ــ هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد (علائم) ریاضی بنویسید.

الف) $A=\{۲,۴,۸,۱۶,۳۲,...\}$ ب) $B=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸\}$

۳ــ متناهی بودن یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A=\{۴n | n\in\mathbb{N}\}$.

ب) مجموعه اعداد طبیعی ۱۰۰ رقمی.

ج) مجموعه اعداد اول.

د) مجموعه اعداد اعشاری بین ۰/۱ و ۰/۳ .

هـ) مجموعه اعداد صحیح بین ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰− .