

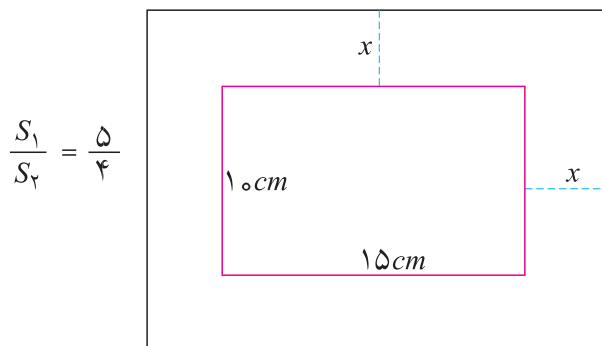
معادلات درجه دوم و حل آن‌ها



معمولاً چتربازان پس از کمی سقوط آزاد، چتر خود را باز می‌کنند. فکر می‌کنید چه مدت طول می‌کشد که یک چتر باز ۲۰ متر سقوط آزاد کند؟

معادلات درجه دوم

مریم می خواهد برای یکی از عکس های خانوادگی خود که ۱۵ سانتی متر طول و ۱۰ سانتی متر عرض دارد، یک قاب عکس تهیه کند. عکس باید از کناره های قاب فاصله های مساوی داشته باشد و می خواهیم نسبت مساحت قاب (S_1) به مساحت عکس (S_2) $\frac{5}{4}$ باشد. طول و عرض این قاب چقدر باید باشد؟



اگر عرض حاشیه ایجاد شده در قاب مورد نظر را x بنامیم، طول و عرض قاب $15 + 2x$ و $10 + 2x$ خواهد بود، پس $S_1 = (15 + 2x)(10 + 2x)$ و $S_2 = 15 \times 10$ و باید داشته باشیم.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(15 + 2x)(10 + 2x)}{15 \times 10} = \frac{5}{4}$$

رابطه بالا یک معادله بر حسب x است و باید به دنبال مقداری برای x بگردیم تا تساوی بالا برقرار شود. آن مقداری از x که تساوی بالا را برقرار می کنند جواب های معادله بالا نامیده می شوند.

معادله هایی را که پس از ساده کردن، بالاترین درجه متغیر آن ۲ باشد معادله درجه دوم می نامند.

معادله مربوط به قاب عکس یک معادله درجه دوم است، زیرا پس از ساده کردن به صورت زیر درمی آید.

$$8x^2 + 100x - 75 = 0$$

مثال: یک نخ به طول یک متر در اختیار داریم و می خواهیم با آن یک مستطیل بسازیم که مساحت آن ۶۰۰ سانتی متر مربع باشد. طول و عرض این مستطیل چقدر باید باشد؟
اگر طول و عرض این مستطیل را بر حسب سانتی متر x و y بنامیم باید داشته باشیم $2(x + y) = 100$ و

$xy = 600$. از معادله اول نتیجه می‌شود $y = 50 - x$ و با جایگذاری در معادله دوم داریم $x(50 - x) = 600$. این نیز یک معادله درجه دوم برحسب x است، زیرا پس از ساده کردن به شکل $x^2 - 50x + 600 = 0$ در می‌آید.

مثال: عددی بیابید که مربع آن ۱۲ واحد بیشتر از خودش باشد؟ اگر این عدد را x بنامیم، باید داشته باشیم $x^2 = x + 12$. این یک معادله درجه دوم برحسب x است و جواب‌های این معادله همان اعداد موردنظر هستند.

آیا هر معادله درجه ۲ جواب دارد؟ به عنوان مثال، آیا عددی هست که جمع مربع آن با ۱ صفر شود؟ اگر چنین عددی وجود داشته باشد، جواب معادله $x^2 + 1 = 0$ خواهد بود. اما مربع هر عددی مثبت است و اگر با ۱ جمع شود صفر نخواهد شد. پس این معادله جواب ندارد.

در مثال قبل اعدادی وجود دارند که مربع آن‌ها ۱۲ واحد بیشتر از خودشان باشند. ۴ یکی از این اعداد است زیرا $4^2 = 4 + 12$ در این مثال، حتی جواب دیگری هم وجود دارد و (-3) نیز جواب این مسئله است، $(-3)^2 = -3 + 12$.

خوارزمی

ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی متولد قبل از ۱۸۵ هـ.ق. ریاضی‌دان، منجم و مورخ و جغرافی‌دان ایرانی و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود، به گونه‌ای که سده‌ی نهم هجری را عصر خوارزمی می‌نامیدند. از جمله معروف‌ترین کتاب‌های او کتاب الجبر و المقابله بوده است که تا قرن ۱۶ میلادی مبنای مطالعات علمی ریاضی‌دانان اروپایی بوده است. خوارزمی در این کتاب به جای مجهول درجه اول (یعنی x) از کلمه شیء به مفهوم چیز نامعلوم استفاده می‌کند. هنگامی که اروپائیان کتاب‌های مسلمانان را به زبان خود ترجمه می‌کردند، کلمه‌ی عربی «شیء» را هم با اندکی تحریف با تلفظ xei به همین شکل برگزیدند و پس از آن که نوشتن معادلات به صورت نمادگذاری معمول شد اروپائیان « x » را که حرف اول آن واژه است به جای مجهول درجه اول اختیار کردند. او نخستین کسی است که علم جبر را به طور مستقل جبر و مقابله نامید. او روش تازه حساب را که به الگوریتم شهرت داشت را در کتاب الجمع والتفریق حساب الهند آورده است. او همه انواع معادلات را به چند نوع استاندارد تبدیل و به کمک چند قاعده به حل آن‌ها می‌پردازد. از خوارزمی کتاب‌های دیگری نظیر کتاب الحساب، صورة الارض وجود دارد. او در سال ۲۳۳ هـ. درگذشت.

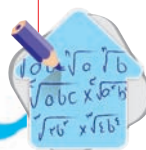
روش‌های حل معادلات درجه دوم

برای حل معادلات درجه دوم روش‌های متعددی وجود دارد که در این بخش برخی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

روش آزمون و خطا

ساده‌ترین روش حل معادله‌های درجه دوم، روش آزمون و خطا است که یک حل تقریبی به دست می‌دهد و در مورد معادلات پیچیده‌تر نیز می‌توان آن را به کار برد.

فعالیت



می‌خواهیم معادله $x^2 - 12x + 34 = 0$ را حل کنیم.

۱- جدول زیر را کامل کنید.

x	۰	۱	۲
$x^2 - 12x + 34$			

۲- آیا با اضافه شدن مقادیر x ، مقادیری که برای $x^2 - 12x + 34$ یافته‌اید در حال نزدیک شدن به صفر است؟

۳- مقادیر x در سطر اول را ادامه دهید تا جایی که مقادیر سطر دوم هم چنان به صفر نزدیک شوند و در جایی منفی شوند.

۴- مقدار $x^2 - 12x + 34$ به ازای $x = 4$ مثبت و به ازای $x = 5$ منفی است. ثابت می‌شود که در چنین حالتی یک جواب معادله بین ۴ و ۵ است. برای یافتن جدول زیر را کامل کنید.

x	۴/۳	۴/۵	۴/۸
$x^2 - 12x + 34$			

۵- با استفاده از جدول مقادیری برای x بیابید که جواب معادله بین آن‌ها باشد؟

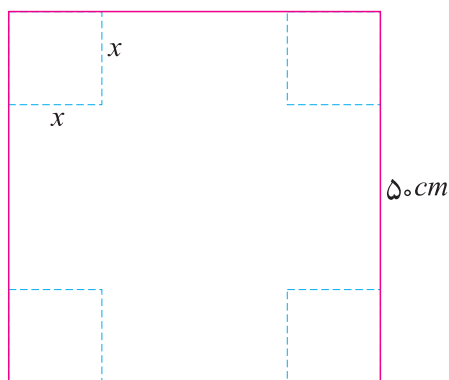
۶- روش بالا را تکرار کنید و در فاصله‌های کوچکتر به دنبال جواب بگردید. یک جواب این معادله را با دقت یک رقم اعشار تعیین کنید.

البته، یک معادله درجه دوم ممکن است دو جواب داشته باشد و با روش بالا فقط یکی از جواب‌ها به طور تقریبی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن جواب دیگر باید حدسی در مورد مقدار آن جواب داشته باشیم. با تکرار روش بالا و مقداردهی مناسب به متغیر، می‌توانیم به آن جواب برسیم.

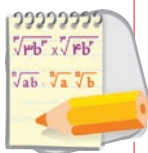


تمرین در کلاس

در یک مغازه شیرینی فروشی، با داشتن مقواهای مربعی به طول 50 سانتی متر، با بریدن گوشه‌های آن به صورت مربع و تا کردن کناره‌های آن، جعبه می‌سازند. از گوشه‌های مربع بزرگ، چه مربع‌هایی را ببریم تا حجم جعبه ساخته شده، 8000 سانتی متر مکعب شود.



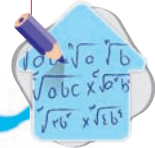
- ۱- طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شوند را x بنامید و حجم جعبه ساخته شده را بر حسب x بنویسید.
- ۲- معادله‌ای تشکیل دهید که حل آن، جواب مسئله را به دست می‌دهد.
- ۳- این معادله، یک معادله درجه دوم نیست، ولی با روش آزمون و خطا، یک جواب تقریبی با دقت یک رقم اعشار برای آن پیدا کنید.



مسائل

- ۱- با دقت دو رقم اعشار با استفاده از روش آزمون و خطا، یکی از دو جواب معادله $2x^2 - 2x - 1 = 0$ را حساب کنید.
- ۲- حل تقریبی معادله $x^2 - 2 = 0$ به معنی محاسبه تقریبی $\sqrt{2}$ است. با استفاده از روش آزمون و خطا، $\sqrt{2}$ را با دقت دو رقم اعشار حساب کنید.

معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^2 = 6x - 7$ می‌نویسیم. می‌توانیم بگوییم جواب این معادله آن مقداری برای x است، که مقدار دو چند جمله‌ای x^2 و $6x - 7$ با هم برابر شوند. همانند روش آزمون و خطا می‌توان عمل کرد و با حدس مقادیر مختلف برای x ، مقادیر x^2 و $6x - 7$ را محاسبه می‌کنیم و با انتخاب‌های مناسب برای x ، کاری می‌کنیم که مقدار این دو چندجمله‌ای به هم نزدیک شوند.



فعالیت

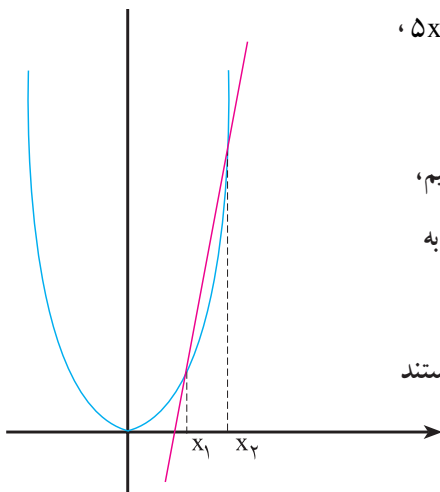
می‌خواهیم معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ را حل کنیم.

۱- جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
x^2		۱	۰	۱			
$6x - 7$	-۱۳	-۷					

۲- اعداد قرار گرفته در این جدول را می‌توان به صورت نمودار دو معادله $y = 6x - 7$ و $y = x^2$ در صفحه نمایش داد. جاهایی که مقدار این دو چند جمله‌ای مساوی می‌شوند، چه نقطه‌هایی از این دو نمودار را نشان می‌دهند.

۳- در جدول به ازای هیچ مقداری از x دو چند جمله‌ای x^2 و $6x - 7$ مساوی نشده‌اند. با رسم نمودارهای معادلات $y = 6x - 7$ و $y = x^2$ و یافتن محل‌های تقاطع این دو نمودار و اندازه‌گیری طول نقطه‌های تقاطع، به‌طور تقریبی جواب‌های این معادله را به دست آورید.



مثال: برای حل یک معادله درجه دوم مانند $5x^2 - 14x + 9 = 0$ ،

می‌توانیم آن را به صورت $x^2 = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ بنویسیم. اگر

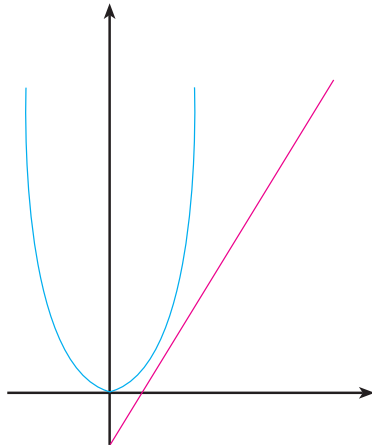
نمودارهای معادله $y = x^2$ و خط $y = \frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ را رسم کنیم،

محل‌های برخورد این دو نمودار جاهایی را نشان می‌دهد که به

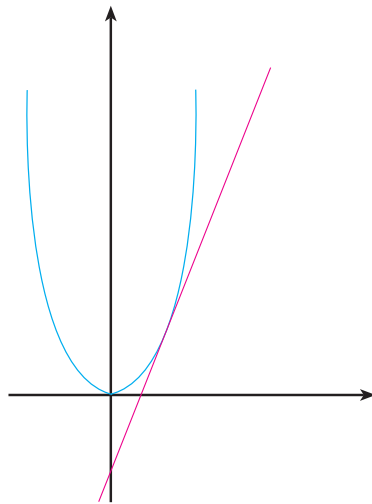
ازای مقدارهایی از x مقدارهای x^2 و $\frac{14}{5}x - \frac{9}{5}$ مساوی

شده‌اند. این مقدارهای x همان طول نقاط تقاطع نمودارها هستند

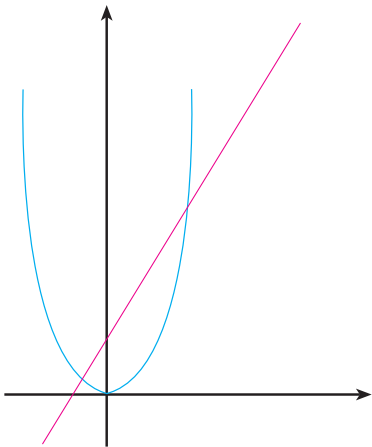
و جواب معادله می‌باشند.



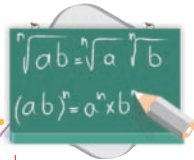
مثال: وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - x + 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.
این معادله را به صورت $x^2 = x - 1$ می‌نویسیم.
اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = x - 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس این معادله جواب ندارد.



مثال: وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.
این معادله را به صورت $x^2 = 2x - 1$ می‌نویسیم.
اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = 2x - 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها حالت مماس بر هم دارند. حدس می‌زنیم معادله فقط یک جواب دارد. با محاسبات جبری باید درستی حدس خود را بیازماییم.

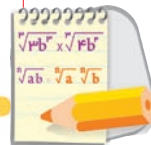


مثال: وضعیت جواب‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ را با روش هندسی تعیین کنید.
این معادله را به صورت $x^2 = 3x + 1$ می‌نویسیم.
اگر نمودار معادله $y = x^2$ و خط $y = 3x + 1$ را رسم کنیم، دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. پس این معادله دو جواب دارد.



تمرین در کلاس

- ۱- نمودار معادله $y = x^2$ و نمودارهای خطهای $y = 2x - 2$ و $y = 2x - 1$ و $y = 2x + 1$ را رسم کنید و محل تقاطع آن‌ها را تعیین کنید.
- ۲- از میان معادلات $x^2 - 2x + 2 = 0$ و $x^2 - 2x + 1 = 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$ تعیین کنید کدام یک جواب دارند و چند جواب دارند.



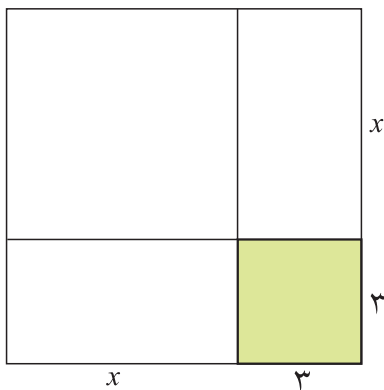
مسائل

- ۱- با رسم نمودار نشان دهید معادله $x^2 + 4 = 0$ جواب ندارد.
- ۲- معادلات زیر را با روش رسم نمودار حل کنید.
- الف) $x^2 + x + 1 = 0$ ب) $x^2 - 4x + 3 = 0$ ج) $4x^2 - 8x = 0$

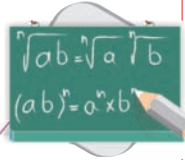
روش خوارزمی

خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم شش روش ایجاد کرده است که هر کدام مربوط به حالت‌های خاص جداگانه است. از میان این روش‌ها فقط یکی از آن‌ها را توضیح خواهیم داد.

معادله $x^2 + 6x - 40 = 0$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی جمله‌های دارای مجهول را در یک طرف تساوی نگه می‌داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم. بنابراین، این معادله را به صورت $x^2 + 6x = 40$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم که در اینجا عدد ۳ است. مساحت مربعی با ضلع $x + 3$ را می‌توان حساب کرد.



در صفحه‌ی قبل مساحت مربع رنگی برابر 3×3 است و بقیه مربع، مساحت $x^2 + 6x$ دارد که آن هم برابر 4^2 است. پس کل مربع بزرگ، مساحت $4^2 = 9 + 4^2 = 49$ دارد. پس، طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{49} = 7$ است، یعنی $x + 3 = 7$ در نتیجه $x = 4$.



تمرین در کلاس

معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ را با روش خوارزمی حل کنید.

همه معادلات درجه دوم را نمی‌توان با این روش حل کرد، زیرا این روش محتاج یک تعبیر هندسی از معادله است و برخی معادلات را نمی‌توان با این روش تعبیر هندسی کرد. علاوه بر این، با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب‌های معادلات درجه دوم به دست می‌آید. خوارزمی برای حل معادلات درجه دوم در حالت‌های دیگر روش‌های دیگری را ساخته است.

روش تجزیه

در مواردی، معادله درجه دوم به صورت ضرب دو چندجمله‌ای درجه ۱ مساوی صفر است. به عنوان مثال معادله $(x-1)(2x+3) = 0$ را در نظر بگیرید. حل این گونه معادلات بسیار ساده است، زیرا طبق یکی از خواص اساسی اعداد، برای آن که ضرب دو عدد صفر شود باید حداقل یکی از آن دو عدد صفر باشند. بنابراین $(x-1)(2x+3) = 0$ فقط در حالتی صفر است که $x-1$ یا $2x+3$ صفر شوند. پس، جواب‌های دو معادله $x-1=0$ و $2x+3=0$ ، همان جواب‌های معادله $(x-1)(2x+3) = 0$ است. یک معادله درجه دوم به صورت تساوی یک چندجمله‌ای درجه دوم با صفر است. اگر بتوانیم این چندجمله‌ای را تجزیه کنیم، می‌توانیم به روش بالا آن را حل کنیم. این روش حل را روش تجزیه می‌نامند.

مثال: معادله $x^2 - 5x = 0$ را حل کنید.

این معادله را به صورت $x^2 - 5x = x(x-5) = 0$ می‌نویسیم. در نتیجه جواب‌های آن $x = 5$ و $x = 0$ خواهند بود.

مثال: معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ را حل کنید.

چند جمله‌ای $x^2 - 5x + 6$ را تجزیه می‌کنیم. $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) = 0$ ، در نتیجه جواب‌های این معادله $x = 3$ و $x = 2$ خواهند بود.

مثال: معادله $2x^2 - 5x - 3 = 0$ را حل کنید.

می‌توان چندجمله‌ای $2x^2 - 5x - 3$ را تجزیه کرد. این چندجمله‌ای را در فصل ۴ با روش‌های معمول تجزیه کرده‌ایم. با عملیات زیر نیز می‌توان این چندجمله‌ای را تجزیه کرد.

$$2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x(x - 3) + (x - 3) = (x - 3)(2x + 1)$$

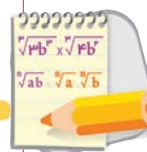
بنابراین، معادله اصلی را می‌توانیم به صورت $(x - 3)(2x + 1) = 0$ بنویسیم. در نتیجه جواب‌های این

$$\text{معادله } x = 3 \text{ و } x = -\frac{1}{2} \text{ خواهند بود.}$$

اگر بتوانیم چندجمله‌ای مربوط به یک معادله درجه دوم را تجزیه کنیم به دو معادله درجه اول می‌رسیم که جواب دارند. بنابراین آن دسته از معادلات درجه دوم که جواب ندارند، چندجمله‌ای آن‌ها قابل تجزیه نخواهد بود.

آخرین مثال نشان می‌دهد که کاربرد روش تجزیه بسیار محدود است، زیرا عمل تجزیه در بسیاری موارد کار آسانی نیست.

مسائل



۱- معادلات زیر را با روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2 - 7x + 6 = 0$ ب) $(x - 1)(x + 1) = (x - 1)$ ج) $4x^2 + 3x - 1 = 0$

روش مربع کامل

این روش، عملاً همان روش خوارزمی است با این تفاوت که جبری است و نیازی به تعبیر هندسی ندارد و به همین علت در حالت کلی می‌توان از آن استفاده کرد.

مثال: معادله $x^2 - 20x + 30 = 0$ را حل کنید.

سعی می‌کنیم روش خوارزمی را به کار ببریم. می‌نویسیم $x^2 - 20x = -30$. نصف ضرب x عدد 10 است و چندجمله‌ای $(x - 10)^2$ را در نظر می‌گیریم. این چندجمله‌ای رابطه مشخصی با چندجمله‌ای $x^2 - 20x$ دارد.

$$(x - 10)^2 = (x^2 - 20x) + 100$$

با توجه به تساوی بالا می‌توانیم معادله اصلی را به صورت $(x - 10)^2 - 100 = -30$ بنویسیم که پس از ساده‌سازی به صورت $(x - 10)^2 = 70$ درمی‌آید. در نتیجه $x - 10$ برابر ریشه‌های دوم 70 است، یعنی

$$x - 10 = \pm\sqrt{70}$$

جواب‌های این معادله عبارتند از: $x = 10 + \sqrt{70}$ و $x = 10 - \sqrt{70}$.
 در روش به کار گرفته شده در مثال صفحه‌ی قبل، چندجمله‌ی $x^2 - 20x$ را برحسب $(x - 10)^2$ نوشتیم،
 به همین خاطر این روش را روش مربع کامل می‌نامند.

مثال: معادله $x^2 - 2bx + 15 = 0$ را حل کنید.
 در این جا، نصف ضریب x برابر $(-b)$ است و چندجمله‌ای $x^2 - 2bx$ را برحسب $(x - b)^2$ می‌نویسیم.

$$(x - b)^2 = (x^2 - 2bx) + b^2$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x - b)^2 - b^2 + 15 = 0$ نوشته می‌شود. در نتیجه $(x - b)^2 = b^2 - 15$.

$$(x - b)^2 = b^2 - 15$$

$$x - b = \pm \sqrt{b^2 - 15}$$

$$x = b + \sqrt{b^2 - 15} \quad \text{و} \quad x = b - \sqrt{b^2 - 15}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $b^2 - 15$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد.
 مثال: معادله $3x^2 - 2x + c = 0$ را حل کنید.

بهرتر است ابتدا کاری کنیم که ضریب x^2 برابر ۱ شود. طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و معادله
 $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{c}{3} = 0$ را به دست می‌آوریم. حال روش قبلی را تکرار می‌کنیم.

در این جا، نصف ضریب x برابر $(-\frac{1}{3})$ است و چندجمله‌ای $x^2 - \frac{2}{3}x$ را برحسب $(x - \frac{1}{3})^2$
 می‌نویسیم.

$$(x - \frac{1}{3})^2 = (x^2 - \frac{2}{3}x) + (\frac{1}{3})^2$$

پس، معادله اصلی به صورت $(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + \frac{c}{3} = 0$ نوشته می‌شود. در نتیجه $(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} - \frac{c}{3}$.

$$(x - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} - \frac{c}{3} = \frac{1 - 3c}{9}$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \sqrt{\frac{1 - 3c}{9}} = \pm \frac{\sqrt{1 - 3c}}{3}$$

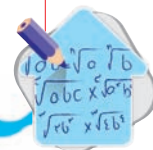
$$x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{1 - 3c}}{3} \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{1 - 3c}}{3}$$

این محاسبه وقتی قابل قبول است که $1 - 3c$ عددی نامنفی باشد تا ریشه‌گیری از آن امکان‌پذیر باشد.

فرمول کلی جواب های معادلات درجه دوم

در فعالیت زیر، روش مربع کامل کردن را روی یک معادله درجه دوم دلخواه پیاده می کنیم تا تشخیص دهیم تحت چه شرایطی یک معادله درجه دوم جواب دارد و در صورت وجود جواب، فرمولی برای جواب های معادله درجه دوم بیابیم.

فعالیت



یک معادله درجه دوم دلخواه به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که a و b و c اعداد معینی هستند و a ناصفر است.

۱- طرفین معادله بالا را بر عدد ناصفر a تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب x^2 برابر ۱ باشد. نشان دهید جواب های این معادله جدید همان جواب های معادله اصلی است.

۲- نصف ضریب x در معادله جدید برابر $\frac{b}{2a}$ است. چندجمله ای $(x + \frac{b}{2a})^2$ را با چندجمله ای معادله جدید مقایسه کنید.

۳- معادله جدید را بر حسب $(x + \frac{b}{2a})^2$ بنویسید و نتیجه بگیرید $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

۴- تحت چه شرایطی تساوی بالا امکان پذیر است. تحت چه شرایطی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ جواب دارد.

۵- نشان دهید که اگر $b^2 - 4ac$ مثبت باشد، طرف دوم معادله جذر دارد و جواب های معادله اصلی برابر

جواب های دو معادله $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ است.

۶- نتیجه بگیرید، معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورت داشتن جواب، دارای جواب های زیر است.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

خوارزمی نیز تمام عملیات گفته شده‌ی این بخش را برای حل یک معادله درجه دوم انجام داده بود ولی در محاسبه جواب‌ها فقط از ریشه مثبت عبارت $b^2 - 4ac$ استفاده نموده است، برای همین فقط یکی از جواب‌ها را به دست آورده است.

در هر معادله درجه ۲ به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ، عبارت $b^2 - 4ac$ را با Δ نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادله درجه دوم آن است که $\Delta < 0$ یا $\Delta = 0$. اگر $\Delta < 0$ ، معادله دو جواب دارد که عبارتند از

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

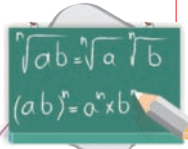
اگر $\Delta = 0$ معادله فقط دارای یک جواب $x = -\frac{b}{2a}$ است. اگر $\Delta < 0$ معادله جواب ندارد.

مثال: جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $5 = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = \Delta$. چون $5 > 0$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است.

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

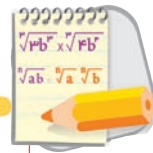
مثال: جواب‌های معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $0 = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = \Delta$. چون $\Delta = 0$ ، این معادله دارای یک جواب $x = -\frac{-12}{18} = \frac{2}{3}$ است.

مثال: جواب‌های معادله $5x^2 + 2x + 1 = 0$ را در صورت وجود پیدا کنید.
در این معادله داریم $-16 = 4 - 20 = -4 \times 5 \times 1 = \Delta$. چون $\Delta < 0$ ، این معادله جواب ندارد.



تمرین در کلاس

معادله مربوط به قاب عکس را که در ابتدای این فصل به دست آمد، حل کنید و جواب‌های آن را تفسیر کنید.



۱- با روش مربع کامل معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 + 3x = 0$$

$$\text{ب) } 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\text{ج) } x^2 - \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$$

۲- کدام یک از معادلات زیر فقط یک جواب دارند؟ جواب آن را بیابید.

$$\text{الف) } x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\text{ب) } x^2 - 7x + 4 = 0$$

$$\text{ج) } x^2 - 6x + 9 = 0$$

۳- با استفاده از فرمول کلی، جواب‌های معادلات درجه دوم، معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\text{ب) } x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$$

$$\text{ج) } 7x^2 - 8x + 1 = 0$$

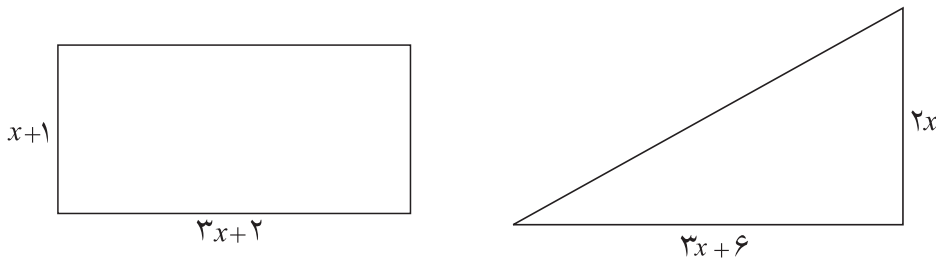
۴- اگر یکی از جواب‌های معادله $ax^2 - 7x + 35 = 0$ برابر (-4) باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۵- اگر طول مستطیلی دو برابر عرض آن باشد و مساحت آن 200 سانتی‌متر مربع باشد، طول و عرض این

مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

۶- در زیر مساحت مثلث و مستطیل رسم شده مساوی هستند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

مسئله چند جواب دارد؟



۷- اگر a عددی مثبت باشد و طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه برابر $2a$ و $2a+1$ و $2a+2$ شده باشد،

کدام عدد طول وتر خواهد بود؟ طول اضلاع این مثلث را بیابید.