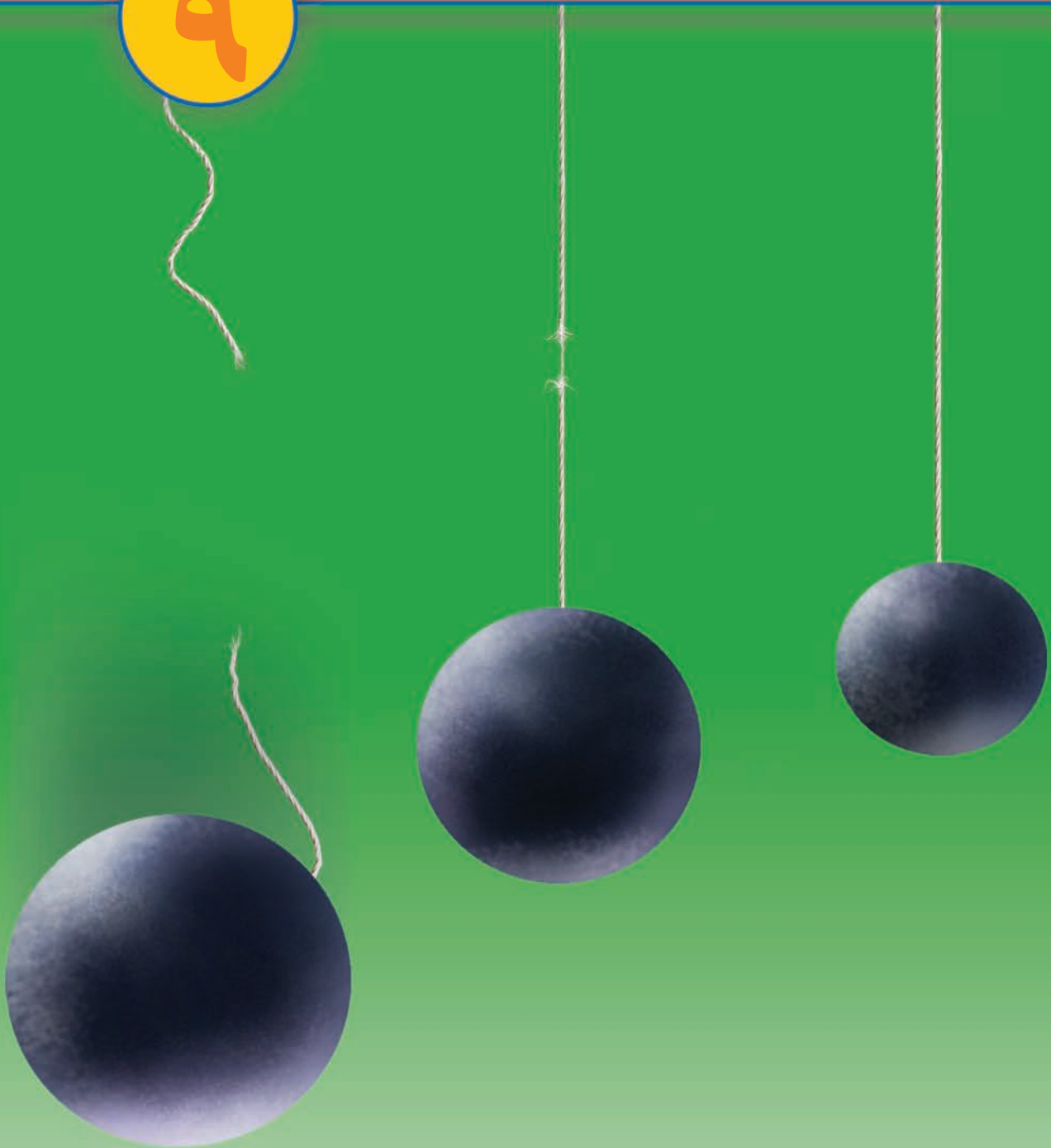


نامعادلات درجه اول

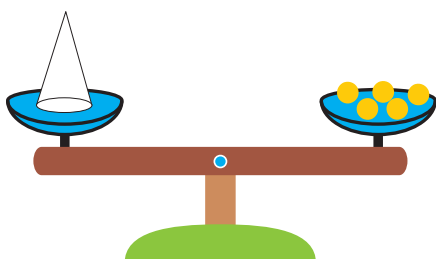
۹



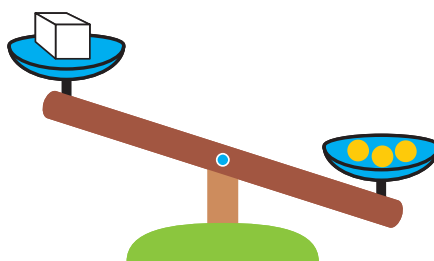
اگر گلوله ای را به نخ آویزان کنیم، معمولاً نخ گلوله را نگه می‌دارد. اما با افزایش وزن گلوله، جایی می‌رسد که نخ باره می‌شود. این مقدار وزن مربوط به چگونگی نخ است. با دانستن قدرت تحمل نخ می‌توانید آن مقادیری از وزن گلوله‌ها را که نخ تحمل می‌کند بنویسید.

نامساوی

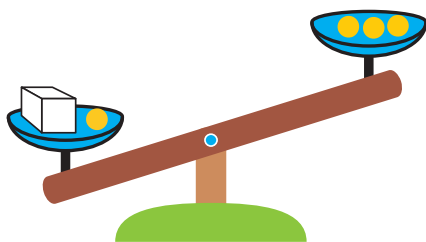
حسن آقا یک خواربارفروشی دارد. او برای به دست آوردن وزن اجناس از یک ترازوی دوکفه‌ای به شکل زیر استفاده می‌کند.



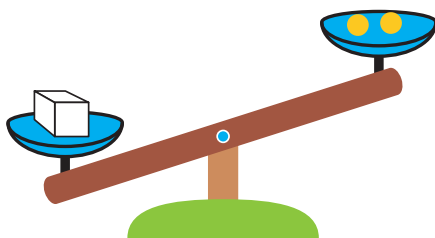
اما، معمولاً وزن اجسام، دقیقاً با استفاده از وزنه‌هایی که حسن آقا در اختیار دارد قابل تعیین نیستند و با هر گونه وزنه‌گذاری روی کفه‌های ترازو، هر دفعه یک طرف سنگین‌تر می‌شود. روزی او برای تعیین وزن بسته‌ای، حدس زد این بسته حدوداً ۳ کیلوگرم وزن دارد و سه وزنه یک کیلوگرمی در یک کفه قرار داد و بسته را در کفه دیگر قرار داد. کفه ترازو در طرف وزنه‌ها، پایین آمد و حسن آقا نتیجه گرفت بسته سبک‌تر است و وزن بسته کمتر از ۳ کیلوگرم است.



اگر وزن بسته را x بنامیم، بیان ریاضی وضعیت ترازو در شکل بالا به صورت $x < 3$ است. در مرحله دوم حسن آقا یک وزنه یک کیلوگرمی در کفه مربوط به بسته قرار داد، و با این عمل، کفه مربوط به بسته پایین رفت.



بیان ریاضی این وضعیت ترازو به صورت $x + 1 < 3$ است. اگر از طرفین این ترازو یک وزنه یک کیلوگرمی برداریم، وضعیت ترازو تغییر نمی‌کند و نتیجه می‌شود $x < 2$.



این عمل به معنای آن است که از طرفین نامساوی $x + 1 < 3$ عدد ۱ را کم کرده‌ایم و نامساوی به همان شکل برقرار مانده است. وضعیت ترازو به هر شکلی که باشد، اگر از طرفین ترازو وزن یکسانی را برداریم یا اضافه کنیم، وضعیت ترازو تغییر نمی‌کند. بیان ریاضی این مطلب به صورت زیر است.

اگر $a < b$ ، آن‌گاه $a + c < b + c$

اگر $a < b$ ، آن‌گاه $a - c < b - c$

نامساوی کوچکتر یا مساوی

یک روز، معلم از ناهید خواست فهرست نام همکلاسی‌های خود را که با او هم‌قد هستند یا از او کوتاهتر هستند، تهیه کند. پس از این کار، معلم از ناهید خواست، مجموعه این شاگردان را به زبان ریاضی بنویسد. ناهید پس از کمی فکر گفت: اگر مجموعه همه‌ی دانش‌آموزان کلاس را با M نشان دهیم، چون قد من ۱۴۷ سانتی‌متر است این مجموعه را به شکل زیر می‌توان نوشت.

$$\{x \in M \mid (x \text{ قد}) < 147\}$$

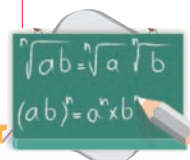
معلم از دانش‌آموزان کلاس پرسید: آیا این مجموعه، همه‌ی همکلاسی‌های ناهید که با او هم‌قد هستند یا از او کوتاهتر هستند را نشان می‌دهد؟ زهره گفت: خود ناهید در این مجموعه نیست چون قد او ۱۴۷ سانتی‌متر است و هیچ عددی از خودش کمتر نیست.

ناهید گفت: درست است. کسانی که با من هم‌قد هستند در این مجموعه نیستند. تعریف را باید اصلاح

کنیم. بهتر است این مجموعه را به صورت زیر بنویسیم.

$$\{x \in M \mid (x \text{ قد}) = ۱۴۷ \text{ یا } (x \text{ قد}) < ۱۴۷\}$$

معلم گفت: اکنون تعریف ناهید از این مجموعه درست است. این رابطه‌ای که ناهید آن را به کار برده است نوعی نامساوی است که آن را نامساوی «کوچکتر یا مساوی» می‌نامند. برای بیان کوچکتر بودن یک عدد از عدد دیگر از نماد «<» استفاده می‌کردیم. برای بیان «کوچکتر یا مساوی» بودن یک عدد از یک عدد دیگر از نماد «≤» استفاده می‌شود. برای بیان این که عدد a از عدد b کوچک‌تر یا مساوی است، می‌نویسیم $a \leq b$. جمله $a \leq b$ ، به معنای آن است که یکی از دو حالت $a < b$ یا $a = b$ برقرار است.



تمرین در کلاس

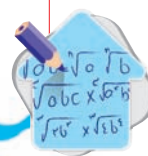
دلیل درستی یا نادرستی هریک از نامساوی‌های زیر را بیان کنید.

الف) $۳ \leq ۴$ ب) $۳ \leq ۳$ ج) $۳ \leq ۲$

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد که $۱ < n < ۲$ آنگاه $n \leq ۲$.

مثال: $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq ۵\} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$.

نامعادلات



فعالیت

آقای صالحی می‌خواست خانه‌اش را رنگ کند. او که فقط ۱۰ روز برای این کار وقت داشت با یک نقاش قرارداد بست که حداکثر در ۱۰ روز، خانه را رنگ بزند و تحویل دهد.

۱- اگر کار نقاش x روز طول بکشد، به‌ازای چه مقادیری از x ، نقاش به قرارداد عمل کرده است؟



۲- اگر کار نقاش ۱۱ روز طول بکشد، آیا او توانسته است به قرارداد عمل کند؟

۳- مهلت انجام کار را به صورت ریاضی بنویسید.

۴- اگر نقاش حداقل ۶ روز برای انجام کارش نیاز داشته باشد، این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید. در این صورت تحویل کار در چند روز می تواند انجام شود تا نقاش به قرارداد هم عمل کرده باشد؟ این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید.

در این فصل به حالت‌هایی برخورد کردیم که جواب مسئله فقط یک عدد خاص نبود و مسئله به گونه‌ای بود که تعداد زیادی جواب برای آن وجود داشت. مسائلی شبیه مسائل بالا را که بیان ریاضی آن‌ها به صورت یک نامساوی بین دو چندجمله‌ای یا دو عبارت گویا باشند را نامعادله می‌نامند. مثلاً، نامساوی‌های زیر نامعادله هستند.

$$2x - 1 < 6, \quad 5x + 3 < x - 1, \quad -4x + 5 \leq 2(x + 1)$$

در این فصل فقط در مورد نامعادلاتی بحث خواهیم کرد که به صورت یک نامساوی بین دو چندجمله‌ای حداکثر درجه اول از یک متغیر باشند.

جواب‌های یک نامعادله، مقادیری از متغیر هستند که به ازای آن‌ها، نامساوی برقرار شود. همه جواب‌های یک نامعادله یک مجموعه تشکیل می‌دهند که آن را مجموعه جواب آن نامعادله می‌نامند.

مثال: در نامعادله $5x - 10 \leq 12$ کدام یک از اعداد $0, 1, 2, 4, 5, 6$ از جواب‌های نامعادله هستند؟ مقدار $5x - 10$ به ازای $x = 0, 1, 2, 4$ از ۱۲ کمتر است، پس $0, 1, 2, 4$ در مجموعه جواب این نامعادله قرار دارند. اما $5x - 10$ به ازای $x = 5$ و 6 از ۱۲ بزرگتر است، پس این اعداد در مجموعه جواب این نامعادله قرار ندارند.

روش های حل نامعادلات

می دانید که اگر به طرفین یک نامعادله عددی را اضافه یا کم کنیم، نامساوی هم چنان به همان شکل برقرار می ماند. با استفاده از این عمل می توان نامعادلات را ساده تر کرد.
مثال: نامعادله $2x - 1 < x + 5$ را حل کنید.

ابتدا به طرفین نامساوی « $-x$ » و سپس ۱ را اضافه می کنیم.

$$2x - 1 < x + 5$$

$$2x - 1 - x < x + 5 - x$$

$$x - 1 < 5$$

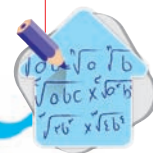
$$x - 1 + 1 < 5 + 1$$

$$x < 6$$

بنابراین، مجموعه اعداد کمتر از ۶، مجموعه جواب این نامعادله هستند.

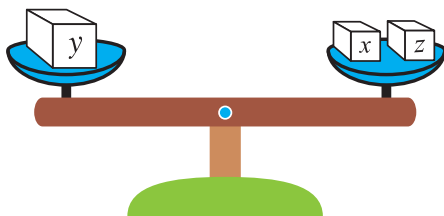
همان گونه که در حل معادلات دیدیم، بسیار پیش می آید که برای حل معادله طرفین تساوی را در عددی ضرب می کردیم. در حل نامعادلات نیز بسیار پیش می آید که باید طرفین نامعادله را در عددی ضرب کنیم. باید بدانیم که ضرب طرفین یک نامساوی در یک عدد، چه تغییری در نامساوی ایجاد می کند. فعالیت زیر، این مسئله را بررسی می کند.

فعالیت

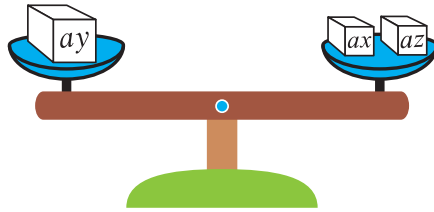


فرض کنید x و y دو عدد مثبت هستند که $x < y$ و a یک عدد مثبت است.

- ۱- بسته هایی به وزن های x و y در نظر بگیرید و آن ها را در دو کفه یک ترازو قرار دهید. وضعیت ترازو به چه شکل درمی آید؟ شکل آن را بکشید.
- ۲- آیا می توان وزنه ای به یکی از دو کفه اضافه کرد تا طرفین هم وزن شوند؟ وزن این وزنه اضافی را z بنامید و بیان ریاضی تساوی به دست آمده را بنویسید.



۳- طرفین تساوی به دست آمده را در a ضرب کنید. تساوی جدید را به صورت وزن بسته‌هایی که در یک ترازو قرار دارند نشان دهید.



۴- اگر بسته به وزن az را از کفه ترازو برداریم وضعیت ترازو به چه شکل درمی‌آید؟ کدام نامساوی را می‌توانید نتیجه بگیرید؟
 ۵- این نامساوی را با نامساوی اول مقایسه کنید.

از این فعالیت نتیجه می‌شود که اگر یک نامساوی بین دو عدد مثبت برقرار باشد، می‌توان طرفین نامساوی را در یک عدد مثبت ضرب کرد و نامساوی مجدداً به همان شکل برقرار می‌ماند. در فعالیت بالا، برای آن که از ترازو استفاده کنیم، مجبور بودیم دو عدد x و y را مثبت فرض کنیم، ولی مثبت بودن x و y ضروری نیست و حتی اگر x یا y ، یا هر دو، مثبت هم نباشند، برای هر عدد مثبت a ، از $x < y$ می‌توان نتیجه گرفت $ax < ay$. برای اثبات این مطلب تمرین زیر را انجام دهید.



تمرین در کلاس

فرض کنید x و y دو عدد باشند که $x < y$ و فرض کنید a عدد مثبتی باشد. دلیل درستی هر مرحله از محاسبه زیر را بیان کنید.

$$\begin{aligned}
 &x < y \\
 &\circ < y - x \\
 &\circ < a(y - x) \\
 &\circ < ay - ax \\
 &ax < ay
 \end{aligned}$$

به این ترتیب، می‌توانیم نتیجه کلی زیر را بیان کنیم و از آن در حل نامعادله‌ها استفاده کنیم.

اگر x و y دو عدد باشند که $x < y$ ، آنگاه برای هر عدد مثبت a داریم $ax < ay$.

در تقسیم طرفین یک نامساوی بر یک عدد مثبت، رابطه مشابهی برقرار است، زیرا تقسیم بر a همان ضرب در $\frac{1}{a}$ است. اگر a عدد مثبتی باشد $\frac{1}{a}$ نیز مثبت است، پس با ضرب طرفین یک نامساوی در $\frac{1}{a}$ ، نامساوی به همان شکل برقرار می‌ماند.

اگر x و y دو عدد باشند که $x < y$ ، آنگاه برای هر عدد مثبت a داریم $\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$.

مثال: اگر از کالایی سه بسته هم‌وزن داشته باشیم، که وزن دوتای آن‌ها از ۴ کیلوگرم بیش‌تر و وزن سه‌تای آن‌ها از ۸ کیلوگرم کمتر باشد، هر بسته از این کالا چه وزن‌هایی ممکن است داشته باشد؟ اگر وزن هر بسته را x بنامیم، بیان ریاضی داده‌های مسئله به صورت $2x < 4$ و $3x < 8$ است. با تقسیم طرفین نامعادله اول بر ۲ نتیجه می‌شود $x < 2$. بنابراین، مجموعه جواب این نامعادله به شکل زیر است.

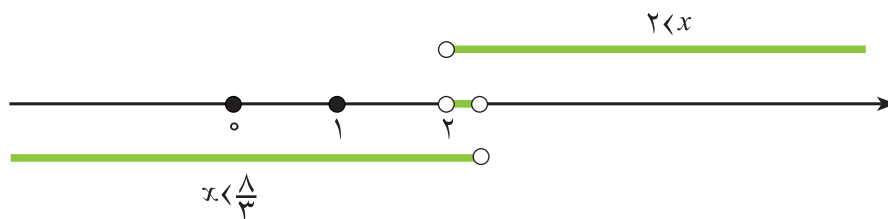


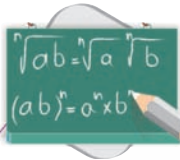
با تقسیم طرفین نامعادله دوم بر ۳ نتیجه می‌شود $x < \frac{8}{3}$. بنابراین مجموعه جواب نامعادله دوم به شکل زیر است.



اشتراک این دو مجموعه، مجموعه جواب‌های مشترک هر دو نامعادله است و عبارت است از

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x, x < \frac{8}{3} \right\}$$





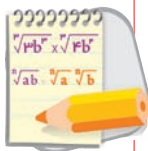
تمرین در کلاس

احمد و اصغر دو دوست هستند که هر کدام تعدادی خرگوش دارند. تعداد خرگوش‌های احمد دو برابر خرگوش‌های اصغر است.

۱- اصغر 10° خرگوش جدید می‌خرد و با این کار، تعداد خرگوش‌هایش از تعداد خرگوش‌های احمد بیش‌تر می‌شود. این مطلب را با نمادهای ریاضی بیان کنید. چه نتیجه‌ای در مورد تعداد خرگوش‌های اصغر به دست می‌آورید؟

۲- اگر سه تا از خرگوش‌های احمد دوقلو بزنند، مجدداً تعداد خرگوش‌های احمد بیش‌تر می‌شود. این مطلب را به صورت ریاضی بنویسید. چه نتیجه جدیدی در مورد تعداد خرگوش‌های اصغر به دست می‌آورید؟

۳- آیا می‌توانید بگویید اصغر دقیقاً چند خرگوش دارد؟



مسائل

۱- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

ج) $4 < 2x - 1$

ب) $3x - 4 \leq 5x - 8$

الف) $2x + 7 < x - 4$

ه) $\frac{x}{4} < \frac{x}{2} - \frac{x}{3}$

د) $\frac{x}{3} \leq x - \frac{1}{2}$

حل یک مسئله

در ایام عید، خانواده زهرا برای مسافرت می‌خواهند با ماشین خودشان از یزد به مشهد بروند. هزینه هر روز اقامت در مشهد برای این خانواده سی هزار تومان است و هزینه رفت و برگشت به مشهد روی هم بیست هزار تومان است. اگر این خانواده در ابتدای سفر چهارصد هزار تومان پول به همراه خود بردارند، حداکثر چند روز در مشهد می‌توانند بمانند؟

معلم، از اکرم خواست تا در پای تخته این مسئله را حل کند. اکرم گفت: ابتدا باید بینیم مجهول مسئله چیست. در اینجا تعداد روزهایی که خانواده زهرا می‌توانند در مشهد بمانند مجهول است و آن را با x

نشان می‌دهیم. بعد باید فرضیات و اطلاعاتی که در مسئله آمده است را به صورت ریاضی بنویسیم. در اینجا می‌توانیم بگوییم که اگر از چهارصد هزار تومان، هزینه اقامت در مشهد را کم کنیم حداقل به اندازه هزینه رفت و برگشت به مشهد باید باقی بماند، یعنی $200000 \leq 400000 - 30000x$.

معلم، از فرزانه خواست بقیه مسئله را او حل کند. فرزانه گفت: این، یک نامعادله است و برای حل آن به طرفین « -400000 » اضافه می‌کنیم. نتیجه می‌شود $30000x \leq 380000$.

طرفین نامساوی را بر -30000 تقسیم می‌کنیم و نتیجه می‌شود $x \leq 12/6 \approx \frac{38}{3}$ ، یعنی خانواده زهرا

می‌توانند بیش از ۱۲ روز در مشهد بمانند.

یکی از دانش‌آموزان گفت: این جواب قابل قبول نیست زیرا معنای آن این است که این خانواده با چهارصد هزار تومان، می‌تواند تا هر وقت که می‌خواهند در مشهد بمانند.

معلم گفت درست است، حتماً در جایی از حل این مسئله اشتباهی رخ داده است. این اشتباه در

کجاست؟ باید یکی یکی عملیاتی را که انجام داده‌ایم بررسی کنیم تا اشتباه را به دست آوریم.

اکرم گفت من می‌دانم اشتباه در کجاست. بهتر است نامعادله را به صورت زیر حل کنیم.

$$200000 \leq 400000 - 30000x$$

$$200000 + 30000x \leq 400000 - 30000x + 30000x$$

$$200000 + 30000x \leq 400000$$

$$200000 + 30000x - 200000 \leq 400000 - 200000$$

$$30000x \leq 380000$$

$$x \leq \frac{380000}{30000} \approx 12/6$$

اکرم گفت: با این جواب، این خانواده حداکثر ۱۲ روز می‌توانند در مشهد بمانند و نه بیشتر و این جواب

قابل قبول است. این جواب شبیه جواب فرزانه است با این تفاوت که جهت نامساوی برعکس آن است.

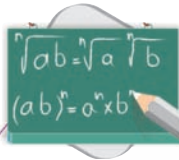
لابد اشتباه محاسبات فرزانه در آن است که در جایی باید جهت نامساوی را تغییر دهد. این عمل احتمالاً

باید به هنگام تقسیم بر « -30000 » انجام شود، زیرا تقسیم بر اعداد مثبت، نامساوی را به همان شکل نگه

می‌دارد، ولی تقسیم بر اعداد منفی شاید نامساوی را برعکس می‌کند.

معلم گفت: پس باید بررسی کنیم که ضرب یک عدد منفی در طرفین یک نامساوی چه تغییری در

نامساوی ایجاد می‌کند.



تمرین در کلاس

فرض کنید x و y دو عدد باشند که $x < y$ و فرض کنید a عددی منفی باشد.

۱- طرفین نامساوی $x < y$ را ابتدا با $-x$ و سپس با $-y$ جمع کنید و یک نامساوی جدید به دست آورید.

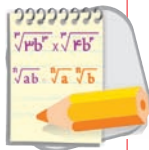
۲- « $-a$ » عددی مثبت است و طرفین نامساوی به دست آمده را در « $-a$ » ضرب کنید و پس از ساده کردن نتیجه بگیرید $ay < ax$.

از تمرین بالا نتیجه می شود :

اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب کنیم یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم جهت نامساوی عوض می شود و نامساوی در یک جهت دیگر برقرار می شود.

مثال: نامعادله $x + 2 < 14 - 3x$ را حل کنید.

با جمع طرفین نامساوی با $-x$ و سپس جمع طرفین با -14 داریم $12 \leq -4x$. با تقسیم طرفین این نامساوی بر -4 نتیجه می شود $x < 3$.



مسائل

۱- نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را روی محور اعداد مشخص کنید.

ب) $x \leq \frac{2x-3}{5}$

الف) $1 + \frac{2x}{3} > \frac{3x}{2} - 4$

د) $x(x-3) < (x-1)^2$

ج) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} < \frac{x}{4} + \frac{x}{5}$

و) $5 \leq 2x-1$, $2x-1 < 8-x$

هـ) $\frac{5x}{2} \leq (1-x)^2 - (x+3)^2$

ز) $1 + \frac{x}{2} \leq 2x-3$, $2x-3 < 8-x$

۲- در عبارت‌های زیر در \square یکی از نمادهای «<» یا «>» یا «=» را قرار دهید.

الف) اگر $a < 1$ ، آنگاه $a^2 \square a^3$.

ب) اگر $a < 0$ و $a < 1$ ، آنگاه $a^2 \square a^3$.

ج) اگر $a < 0$ آنگاه $a^2 \square a^3$.

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر مربوط به مجموعه جواب نامعادله $1 - x \leq 3 - 2(x - 1)$ است؟



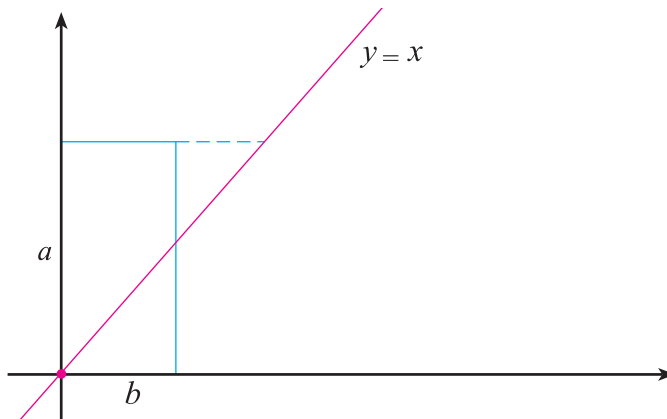
۴- یک شرکت سازنده میزهای تحریر، برای پرداخت حقوق کارگران و مخارج دستگاه‌ها، 3200000 تومان هزینه هفتگی دارد. هزینه مواد اولیه برای هر میز 20000 تومان، و قیمت فروش هر میز 30000 تومان است.

الف) اگر تعداد میزهای تولیدشده در یک هفته را x بنامیم، مقدار هزینه انجام‌شده در یک هفته را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

ب) با فرضیات قسمت (الف)، درآمد به دست آمده در یک هفته را بنویسید.

ج) تفاضل هزینه از درآمد را سود می‌نامند. این شرکت حداقل چند میز در هفته باید بفروشد تا سود ببرد؟

۵- از طریق شکل زیر نشان دهید برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \geq ab$.



۱- مجموعه مقالات کمیته فرهنگ و تمدن اسلام و ایران، دبیرخانه شورای عالی انقلاب فرهنگی
۲- ریاضیات ۱ چاپ ۱۳۸۶، علی رضا مدقالچی، اسماعیل بابلیان.

۳- FUNCTIONS, STATISTICS AND TRIGONOMETRY SHARON, L. SENK
AND OTHERS. SCOTT FORESMAN, ADDISON WESLEY

۴- MATHEMATICS FOR STUDENTS, J.L.MARTIN, MCMILLAN

۵- MATHEMATICS FOR TEACHERS, J.L.MARTIN, MCMILLAN

۶- MATHEMATICAL IDEAS, CHARLES D.MILLER, SEVENTH EDITION,
HARPER COLLINS PUBLISHER.

۷- MIDDLE GRADES MATH TOOLS FOR SUCCESS PRENTICE HALL

۸- PRINCIPLES & STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS
N.C.T.M.

۹- REAL LIFE MATHEMATICS, EVERYDAY USE OF MATHEMATICS
CONCEPTS, EVAN M.GLAZER , JOHN W. MCCONNELL GREENWOOD
PRESS.

۱۰- WWW. TIMSS/RELEASED ITEMS/ MATHEMATICS /08

سؤالات قابل انتشار ۲۰۰۳ TIMSS



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آمان می توانستند نظر اصلاحی خود را در باره ی مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر نامه ریزی و تالیف کتاب های درسی